Barvení grafů – pravděpodobnostní důkazy

Zdeněk Dvořák

3. prosince 2019

1 Seznamová barevnost úplných bipartitních grafů

Hypergraf je *(slabě) k-obarvitelný*, jestliže existuje jeho obarvení k barvami neobsahující monochromatickou hranu. Nechť $M_k(s)$ označuje nejmenší počet hran s-uniformního hypergrafu, který není k-obarvitelný.

Lemma 1.

$$2^{s-1} \le M_2(s) = O(s^2 2^s)$$

Důkaz. Uvažme náhodný s-uniformní hypergraf na $n = s^2 + 2s$ vrcholech, kde každá s-tice tvoří hranu náhodně nezávisle s pravděpodobností $p = \frac{n}{\binom{n/2}{s}}$. Uvažme libovolné 2-obarvení φ vrcholů, přiřazující t vrcholům hodnotu 1 a $n-t$ vrcholům hodnotu 0. Pak pravděpodobnost, že φ je dobré obarvení, je

$$(1-p)^{\binom{t}{s}+\binom{n-t}{s}} \le (1-p)^{\binom{n/2}{s}} \le e^{-p\binom{n/2}{s}} = e^{-n},$$

a tedy s pravděpodobností $(2/e)^n \to 0$ výsledný hypergraf nemá 2-obarvení. Dle Markovovy nerovnosti má s pravděpodobností alespoň $1/2$ nejvýše $2p\binom{n}{s} = O(s^2 2^s)$ hran.

Naopak, má-li s-uniformní hypergraf m hran, pak střední hodnota počtu monochromatických hran v náhodném 2-obarvení je $\frac{m}{2^{s-1}}$. Je-li $m < 2^{s-1}$, pak tedy hypergraf má nějaké dobré 2-obarvení. □

Věta 2. *Každý bipartitní graf G s méně než $M_2(s)$ vrcholy je s-vybíravý.*

Důkaz. Nechť L je přiřazení seznamů délky s vrcholům G. Uvažme hypergraf, jehož hrany jsou s-tice $L(v)$ pro $v \in V(G)$. Dle definice $M_2(s)$ je tento hypergraf 2-obarvitelný, barvy tedy můžeme rozdělit do množin A a B tž. $L(v) \cap A \ne \emptyset$ a $L(v) \cap B \ne \emptyset$ pro každé $v \in V(G)$. Vrcholy v jedné z partit obarvíme barvami z A, vrcholy ve druhé partitě barvami z B. □

Věta 3. *Jestliže $n \geq M_2(s)$, pak $K_{n,n}$ není s-vybíravý.*

Důkaz. Nechť H je s-uniformní hypergraf s hranami $e_1, \ldots, e_n$, který není 2-obarvitelný. Nechť a_i a b_i pro $i = 1, \ldots, n$ jsou vrcholy $K_{n,n}$ v různých partitách. Položme $L(a_i) = L(b_i) = e_i$ pro $i = 1, \ldots, n$. Kdyby $K_{n,n}$ měl L-obarvení φ, položme $A = \{\varphi(a_i) : i = 1, \ldots, n\}$ a $B = \{\varphi(b_i) : i = 1, \ldots, n\}$. Množiny A a B jsou disjunktní a protínají každou z hran H, dávaly by tedy dobré 2-obarvení H, což je spor. □

2 Seznamová barevnost grafů velkého minimálního stupně

Lemma 4. *Graf G minimálního stupně δ obsahuje bipartitní podgraf G_1 minimálního stupně alespoň $\delta/2$ tž. $V(G_1) = V(G)$.*

Důkaz. Nechť A, B je rozklad $V(G)$ na dvě části takový, že počet hran s jedním koncem v A a druhým v B je maximální. Pak každý vrchol $v \in V(G)$ má alespoň $\deg(v)/2$ sousedů v opačné části. □

Věta 5. *Má-li graf G minimální stupeň alespoň $d = 2\binom{k^4}{k} \log\left[2\binom{k^4}{k}\right]$, pak seznamová barevnost G je větší než k.*

Důkaz. Dle Lemma 4 má G bipartitní podgraf G_1 minimálního stupně alespoň $d/2$ tž. $V(G_1) = V(G)$. Nechť A a B jsou partity G_1 a $|A| \geq |B|$. Položme $s = k^4$ a $C = \{1, \ldots, s\}$. Vrcholům G_1 budeme přiřazovat jako seznamy k-prvkové podmnožiny C.

Nejprve určíme seznamy vrcholů v B. Pro $v \in B$, nechť X_v je k-prvkové podmnožina C, zvolená uniformně a nezávisle. Vrchol $u \in A$ je *univerzální vůči X*, jestliže pro každou k-prvkovou podmnožinu $P \subseteq C$ existuje $uv \in E(G_1)$ tž. $X_v = P$. Pravděpodobnost, že u není univerzální, je nejvýše

$$\binom{s}{k}\left(1 - \frac{1}{\binom{s}{k}}\right)^{\deg u} \leq \binom{s}{k}\left(1 - \frac{1}{\binom{s}{k}}\right)^{d/2} \leq \binom{s}{k} e^{-\frac{d}{2\binom{s}{k}}} = \frac{1}{2}.$$

Střední hodnota počtu vrcholů A, které jsou univerzální vůči X, je tedy alespoň $|A|/2 \geq |B|/2$.

Existuje tedy přiřazení k-prvkových podmnožin $L_v \subseteq C$ vrcholům $v \in B$ takové, že alespoň $|B|/2$ vrcholů z A je univerzálních vůči L. Seznamy $L_u \subseteq C$ velikosti k pro vrcholy $u \in A$ nyní zvolíme uniformně a nezávisle.

Uvažujme libovolné obarvení φ množiny B ze seznamů L. Je-li $u \in A$ univerzální, pak na jeho okolí φ používá barvu z každé k-prvkové podmnožiny

C, a tedy na jeho okolí používá alespoň $s-k+1$ barev. Obarvení φ lze rozšířit na u pouze tehdy, když L_u obsahuje alespoň jednu z nejvýše $k-1$ barev, které se nevyskytují na okolí u. Pravděpodobnost, že to nastane, je nejvýše

$$\frac{(k-1)\binom{s-1}{k-1}}{\binom{s}{k}} < \frac{k^2}{s},$$

a tedy pravděpodobnost, že φ lze rozšířit na všechny vrcholy A, je méně než $\left(\frac{k^2}{s}\right)^{|B|/2}$.

Možných voleb φ je $k^{|B|}$, a tedy pravděpodobnost, že alespoň jedno z těchto obarvení lze rozšířit, je méně než

$$k^{|B|}\left(\frac{k^2}{s}\right)^{|B|/2} = \left(\frac{k^4}{s}\right)^{|B|/2} = 1.$$

Proto existuje volba seznamů $L_u \subseteq C$ velikosti k pro vrcholy $u \in A$ taková, že žádné L-obarvení B nejde rozšířit na A, a tedy G_1 (a tím spíše G) není L-obarvitelný. $\square$

Důsledek 6. *Nechť d je nejmenší celé číslo takové, že každý podgraf G má vrchol stupně nejvýše d. Pak*

$$\Omega\left(\frac{\log d}{\log\log d}\right) \le \chi_l(G) \le d+1.$$

3 Nezávislé množiny v grafech bez trojúhelníků

Věta 7. *Nechť G je graf maximálního stupně Δ s n vrcholy. Jestliže G neobsahuje trojúhelník, pak*

$$\alpha(G) \ge \frac{\log_2\Delta}{16\Delta}n.$$

Důkaz. Zvolme nezávislou množinu W v G uniformně. Nechť v je libovolný vrchol G a Z je libovolná nezávislá množina v $G-N[v]$. Nechť $k \le \Delta$ je počet vrcholů v $N(v)$, které nemají souseda v Z. Povšimněme si, že $N(v)$ je nezávislá množina v G. Podmíněná pravděpodobnost, že $v \in W$, za předpokladu, že $W \setminus N[v] = Z$, je $\frac{1}{2^k+1}$. Střední hodnota počtu vrcholů W v $N(v)$ za stejného předpokladu je $\frac{k2^{k-1}}{2^k+1}$. Nechť $X_v = [v \in W] + \frac{1}{\Delta}|N(v)\cap W|$. Pak střední hodnota X_v za předpokladu, že $W \setminus N[v] = Z$, je

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{k2^{k-1}}{2^k+1} \ge \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{k}{4\Delta} \ge \frac{\log_2\Delta}{8\Delta}.$$

Jelikož tento odhad platí pro každé Z, nepodmíněná střední hodnota X_v je také alespoň $\frac{\log_2 \Delta}{8\Delta}$, a střední hodnota $\sum_{v\in V(G)} X_v$ je alespoň $\frac{\log_2 \Delta}{8\Delta} n$.

Nicméně,

$$\sum_{v\in V(G)} X_v = |W| + \frac{1}{\Delta} \sum_{v\in V(G)} |N(v) \cap W| \leq 2|W|,$$

a proto střední hodnota $|W|$ je alespoň $\frac{\log_2 \Delta}{16\Delta} n$. □

Důsledek 8. *Graf G bez trojúhelníků na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\Omega(\sqrt{n \log n})$. Ramseyovo číslo $R(3, m)$ je tedy $O\big(\frac{m^2}{\log m}\big)$.*

Důkaz. Jestliže $\Delta(G) = \Omega(\sqrt{n \log n})$, pak okolí vrcholu nejvyššího stupně je nezávislá množina velikosti $\Omega(\sqrt{n \log n})$. Jestliže $\Delta(G) = O(\sqrt{n \log n})$, tvrzení plyne z Věty 7. □

4 Barvení grafů bez trojúhelníků

Funkce $f : A^n \to \mathbf{R}$ má *reakci na změnu* nejvýše c, jestliže pro každé $\vec{x}$ a $\vec{y}$, které se liší pouze v jedné souřadnici, platí $|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq c$.

Věta 9. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné proměnné s oborem hodnot A a nechť $f : A^n \to \mathbf{R}$ má reakci na změnu nejvýše c. Pak*

$$Pr\big[|f(X_1, \ldots, X_n) - E[f(X_1, \ldots, X_n)]| > t\big] < 2e^{-\frac{t^2}{2c^2 n}}.$$

Funkce $f : A \to \mathbf{R}$ má *r-certifikáty*, jestliže pro každé $\vec{x}$ tž. $f(\vec{x}) \geq s$ existuje nejvýše rs souřadnic I tak, že shoduje-li se $\vec{y}$ s $\vec{x}$ na souřadnicích I, pak $f(\vec{y}) \geq s$.

Věta 10 (Talagrandova nerovnost)**.** *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné proměnné s oborem hodnot A a nechť $f : A^n \to \mathbf{R}$ má reakci na změnu nejvýše c a r-certifikáty. Nechť $E = E[f(X_1, \ldots, X_n)]$. Pak pro $0 \leq t \leq E$ platí*

$$Pr\big[|f(X_1, \ldots, X_n) - E| > t + 60c\sqrt{rE}\big] < 4e^{-\frac{t^2}{8c^2 rE}}.$$

Věta 11. *Existuje Δ_0 tak, že každý graf G maximálního stupně $\Delta \geq \Delta_0$ bez trojúhelníků má barevnost nejvýše $\big(1 - \frac{1}{2e^6}\big)\Delta$.*

Důkaz. BÚNO G je Δ-regulární (jinak ho zanoříme do Δ-regulárního grafu bez trojúhelníků). Přiřaďme každému vrcholu náhodně jednu z $C = \lfloor \Delta/2 \rfloor$ barev uniformně nezávisle. Následně odbarvěme všechny vrcholy, které mají přiřazenu barvu shodnou s barvou nějakého souseda. Ukážeme, že s nenulovou pravděpodobností pro každý vrchol v existuje alespoň $\frac{\Delta}{2e^6}+1$ barev, které jsou na okolí v použity alespoň dvakrát. Proto můžeme G hladově dobarvit $\left(1-\frac{1}{2e^6}\right)\Delta$ barvami.

Nechť X_v je počet barev, které byly přiřazeny alespoň dvěma sousedům v, a ani z jednoho souseda nebyly odbarveny. Nechť A_v je jev, že $X_v < \frac{\Delta}{2e^6}+1$. Níže ukážeme, že $\Pr(A_v) < \frac{1}{e\Delta^4}$. Jelikož A_v může být ovlivněno jevy A_w pouze pro w ve vzdálenosti nejvýše 4 od v, a počet takových vrcholů w je menší než Δ^4, z Lovászova lokálního lemmatu pak bude plynout, že s nenulovou pravděpodobností žádný jev A_v nenastává.

Abychom ukázali $\Pr(A_v) < \frac{1}{e\Delta^4}$, budeme dokazovat následující dvě nerovnosti.

$$E[X_v] \geq \frac{\Delta}{e^6} - 1 \tag{1}$$

$$\Pr\left[|X_v - E[X_v]| > \sqrt{\Delta}\log\Delta\right] < \frac{1}{2e\Delta^4} \tag{2}$$

Z nich požadované tvrzení zjevně plyne, jelikož $2+\sqrt{\Delta}\log\Delta < \frac{\Delta}{2e^6}$.

Pro důkaz (1) odhadujme počet barev, které jsou přiřazeny přesně dvěma vrcholům $u, w \in N(v)$ a následně nejsou odbarveny. To nastane, když nějaká barva α je přiřazena u a w a žádnému dalšímu vrcholu v $N(u)\cup N(v)\cup N(w)$ – těchto vrcholů je nejvýše $3\Delta - 3 \leq 6C$. Pravděpodobnost, že to nastane pro zvolené u, w a α je alespoň $\frac{1}{C^2}\left(1-\frac{1}{C}\right)^{6C}$, a voleb u, w a α je $C\binom{\Delta}{2}$. Dostáváme tedy

$$E[X_v] \geq C\binom{\Delta}{2}\frac{1}{C^2}\left(1-\frac{1}{C}\right)^{6C} \geq \frac{\Delta-1}{e^6}\left(1-\frac{4}{C}\right) > \frac{\Delta}{e^6} - 1.$$

Pro důkaz (2) rozepišme $X_v = T_v - R_v$, kde T_v je počet barev, které byly přiřazeny alespoň dvěma sousedům v, a R_v je počet barev, které byly přiřazeny alespoň dvěma sousedům v a na alespoň jeden z nich byl odbarven. Stačí tedy ukázat, že T_v a R_v jsou obě koncentrovány kolem své střední hodnoty.

Proměnná T_v záleží pouze na barvách Δ sousedů v a změna barvy jednoho z nich změní T_v nejvýše o 2. Z Věty 9 tedy dostáváme $\Pr\left[|T_v - E[T_v]| > t\right] < 2e^{-\frac{t^2}{8\Delta}}$. Proměnná R_v záleží na barvách vrcholů ve vzdálenosti nejvýše 2 od v a opět změna barvy jednoho z těchto vrcholů změní R_v nejvýše o 2. Navíc má R_v 3-certifikáty: pro každou barvu α započítanou do R_v stačí mít dva sousedy v obarvené α a dalšího souseda jednoho z nich obarveného α. Jelikož $E[R_v] \leq C < \Delta$, z Věty 10 máme $\Pr\left[|R_v - E[R_v]| > t + 120\sqrt{3\Delta}\right] < 4e^{-\frac{t^2}{96\Delta}}$. Dosazením $t = \frac{\sqrt{\Delta}}{3}\log\Delta$ do těchto dvou nerovností dostaneme (2). □