Hustota 4-kritických grafů

Zdeněk Dvořák (založeno na článku A. Kostochky a M. Yanceye)

27. října 2015

Nechť $e(G)$ je počet hran grafu G a $n(G)$ je počet jeho vrcholů. Definujme

$$p(G) := 3e(G) - 5n(G).$$

Povšimněme si, že $p(K_1) = -5$, $p(K_2) = -7$ a $p(K_3) = -6$, a proto $p(G) \leq -7$ pro každý graf G s nejvýše třemi vrcholy různý od K_1 a K_3.

Věta 1. *Každý 4-kritický graf G splňuje $p(G) \geq -2$, a tedy*

$$e(G) \geq \frac{5n(G) - 2}{3}.$$

Graf G je *protipříklad*, jestliže G je 4-kritický a $p(G) \leq -3$. Graf G je *minimální protipříklad*, jestliže G je protipříklad a žádný graf G' tž. $n(G') < n(G)$ nebo $n(G') = n(G)$ a $e(G') < e(G)$ není protipříklad.

Lemma 2. *Nechť G je minimální protipříklad a $S \subsetneq V(G)$ má velikost alespoň 4. Nechť $\varphi : S \to \{1, 2, 3\}$ je dobré 3-obarvení $G[S]$. Pak existuje $G' \subseteq G$ takový, že $G[S] \subsetneq G'$ a $p(G') \geq p(G[S]) + 3$. Navíc, jestliže $p(G') = p(G[S]) + 3$ and $G' = G$, pak φ přiřazuje stejnou barvu všem vrcholům v S, které mají souseda ve $V(G) \setminus S$.*

Důkaz. Nechť G_1 je graf získaný z G přidáním trojúhelníku $T = x_1x_2x_3$ a zidentifikováním všech vrcholů ve $\varphi^{-1}(i)$ s x_i pro $i = 1, 2, 3$. Zjevně graf G_1 není 3-obarvitelný, jinak bychom mohli obarvit G třemi barvami. Existuje tedy 4-kritický graf $G_2 \subseteq G_1$. Jelikož G je 4-kritický a $n(G_2) < n(G)$, G_2 není podgraf G, a proto $T' := T \cap G_2$ je neprázdný. Nechť G' je graf vzniklý z G_2 dekontrahovaním T' a přidáním $G[S]$, tedy $V(G') = (V(G_2) \setminus V(T')) \cup S$ a $E(G') = (E(G_2) \setminus E(T')) \cup E(G[S])$. Zřejmě

$$p(G') = p(G_2) - p(T') + p(G[S]).$$

Jelikož G_2 je 4-kritický a $n(G_2) < n(G)$, minimalita G implikuje, že $p(G_2) \geq -2$. Dále T' je neprázdný podgraf trojúhelníka, a proto $p(T') \leq -5$ jestliže $T' = K_1$ a $p(T') \leq -6$ jinak. Vyvodíme tedy

$$p(G') \geq p(H) + 3.$$

Platí-li $p(G') = p(H) + 3$, pak $T' = K_1$; bez újmy na obecnosti $V(T') = x_1$. Jestliže navíc $G' = G$, pak G_2 obsahuje všechny hrany mezi S a $V(G) \setminus S$, a všechny jejich konce v S tedy mají barvu 1. $\square$

Lemma 3. *Nechť G je minimální protipříklad a $H \subseteq G$. Pak*

- $p(H) \leq -3$ *jestliže* $H = G$
- $p(H) = -5$ *jestliže* $H = K_1$
- $p(H) \leq -6$ *jestliže nenastává ani jedna z těchto možností.*

Důkaz. Tvrzení je triviální, jestliže $H = G$ nebo $|V(H)| \leq 3$.

Nechť tedy $|V(H)| \geq 4$ a $H \neq G$. Zvolme podgraf s těmito vlastnostmi takový, že $p(H)$ je maximální. Jestliže H není indukovaný podgraf, pak existuje hrana $e \in E(G) \setminus E(H)$ s oběma konci ve $V(H)$ a $p(H + e) > p(H)$; z maximality $p(H)$ plyne, že $H + e = G$, pak ale $p(H) = p(G) - 3 \leq -6$. Můžeme tedy předpokládat, že H je indukovaný podgraf G.

Jelikož $H \subsetneq G$ a G je 4-kritický, existuje dobré obarvení $\varphi : V(H) \to \{1, 2, 3\}$ grafu H třemi barvami. Podle Lemma 2 existuje $G' \subseteq G$ takové, že $H \subsetneq G'$ a $p(G') \geq p(H) + 3$. Nicméně, H je vlastní podgraf G s alespoň 4-mi vrcholy takový, že $p(H)$ je maximální. Proto $G' = G$ a $p(H) \leq p(G') - 3 = p(G) - 3 \leq -6$. $\square$

Důsledek 4. *Je-li H podgraf G a $n(H) < n(G)$ nebo $e(H) \leq e(G) - 2$, pak pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V(H)$ existuje dobré 3-obarvení grafu $H + uv$.*

Důkaz. Kdyby takové 3-obarvení neexistovalo, pak $H + uv$ má 4-kritický podgraf H', kde buď $n(H') < n(G)$, nebo $n(H') = n(G)$ a $e(H') < e(G)$. Z minimality G dostáváme $p(H') \geq -2$, a proto $p(H' - uv) \geq -5$. Jelikož $H' - uv \neq K_1$, dostáváme spor s Lemma 3. $\square$

Pozorování 5. *Je-li G k-kritický pro $k \geq 1$, pak G je 2-souvislý.*

Lemma 6. *Nechť G je minimální protipříklad a $H \subseteq G$. Pak*

- $p(H) \leq -3$ *jestliže* $H = G$
- $p(H) = -5$ *jestliže* $H = K_1$

- $p(H) = -6$ *jestliže* $H = K_3$
- $p(H) \leq -6$ *jestliže* $H = G - e$ *pro nějakou hranu* e
- $p(H) \leq -7$ *jestliže nenastává ani jedna z těchto možností.*

Důkaz. Tvrzení je triviální, jestliže $H = G$ nebo $|V(H)| \leq 3$. Je-li $H = G - e$, pak $p(H) \leq p(G) - 3 \leq -6$.

Nechť tedy $|V(H)| \geq 4$, $H \neq G$ a $H \neq G - e$. Zvolme podgraf s těmito vlastnostmi takový, že $p(H)$ je maximální. Jestliže H není indukovaný podgraf, pak existuje hrana $e' \in E(G) \setminus E(H)$ s oběma konci ve $V(H)$ a $p(H + e') > p(H)$; z maximality $p(H)$ plyne, že $H + e' = G - e$ pro nějakou hranu e, pak ale $p(H) = p(G) - 6 < -7$. Můžeme tedy předpokládat, že H je indukovaný podgraf G.

Jelikož G je 2-souvislý, existují alespoň dva různé vrcholy $u, v \in V(H)$, které mají souseda v $V(G) \setminus V(H)$; označme si jako e_u a e_v hrany sousedící s u a v takové, že jejich druhé konce jsou v $V(G) \setminus V(H)$. Dle Corollary 4 existuje dobré obarvení $\varphi : V(H) \to \{1, 2, 3\}$ grafu $H + uv$ třemi barvami. Podle Lemma 2 existuje $G' \subseteq G$ takové, že $H \subsetneq G'$ a $p(G') \geq p(H) + 3$.

Nicméně, H je podgraf G (s alespoň 4-mi vrcholy) různý od G a $G - e$ takový, že $p(H)$ je maximální. Proto $G' = G - e$ nebo $G' = G$. Jestliže $G' = G - e$, pak $p(H) \leq p(G') - 3 \leq p(G) - 6 < -7$. Zbývá tedy uvážit případ $G' = G$. Dle volby φ nemají všechny vrcholy z $V(H)$ se sousedy v $V(G) \setminus V(H)$ stejnou barvu. Corollary 4 tedy implikuje, že $p(G') \geq p(H) + 4$, a proto $p(H) \leq p(G') - 4 = p(G) - 4 \leq -7$. □

Pozorování 7. *Je-li* G k*-kritický pro* $k \geq 1$*, pak* $\delta(G) \geq k - 1$.

Lemma 8. *Je-li* G *minimální protipříklad, pak žádný trojúhelník v* G *neobsahuje dva vrcholy stupně* 3.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $T = v_1v_2v_3$ je trojúhelník v G takový, že v_1 a v_2 mají stupeň 3. Nechť x_1 a x_2 jsou sousedi v_1 a v_2 mimo T.

Jestliže $x_1 = x_2$, pak uvažme podgraf H grafu G indukovaný vrcholy v_1, v_2, v_3 a x_1. Máme $e(H) \geq 5$ a $n(H) = 4$, a proto $p(H) \geq -5$. Z Lemma 6 plyne, že $H = G$, a jelikož $\delta(G) \geq 3$, dostáváme $G = K_4$. Pak ale $p(G) = -2$, což je spor.

Proto $x_1 \neq x_2$. Nechť $G_1 = G - \{v_1, v_2\} + x_1x_2$. Dle Corollary 4 existuje 3-obarvení φ grafu G_1. Pak ale existuje i 3-obarvení G: jestliže $\varphi(x_1) = \varphi(v_3)$ nebo $\varphi(x_2) = \varphi(v_3)$, pak obarvěme vrcholy v_1 a v_2 hladově. Jinak položme $\varphi(v_1) = \varphi(x_2)$ a $\varphi(v_2) = \varphi(x_1)$, což lze, jelikož $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ díky hraně x_1x_2. To je spor. □

Lemma 9. *Nechť G je minimální protipříklad. Jestliže $uv \in E(G)$ a $\deg(u) = \deg(v) = 3$, pak u je obsažen v trojúhelníku.*

Důkaz. Nechť x_1 a x_2 jsou sousedi u různí od v. Pro spor předpokádejme, že $x_1x_2 \notin E(G)$. Nechť G_1 je graf získaný z $G - \{u, v\}$ zidentifikováním x_1 a x_2 do jednoho vrcholu x. Pak G_1 není 3-obarvitelný, jelikož každé 3-obarvení G_1 lze rozšířit na 3-obarvení G. Proto G_1 má 4-kritický podgraf G_2. Jelikož $G_2 \not\subseteq G$, vrchol x je obsažen v G_2. Z minimality G máme $p(G_2) \geq -2$. Nechť G_3 je graf získaný z G_2 dekontrakcí x a přidáním cesty x_1ux_2. Máme $p(G_3) = p(G_2) - 4 \geq -6$. Zjevně G_3 má alespoň 6 vrcholů, z Lemma 6 proto dostáváme $G_3 = G$ nebo $G_3 = G - e$. To je ale spor, jelikož $v \notin V(G_3)$. □

Důsledek 10. *Je-li G minimální protipříklad, pak každý vrchol stupně 3 má alespoň dva sousedy stupně alespoň 4.*

Důkaz. Nechť u je vrchol stupně 3 se sousedy v_1, v_2 a v_3. Jestliže například v_1 má stupeň 3, pak dle Lemmat 9 a 8 vyvodíme, že $v_2v_3 \in E(G)$ a $\deg(v_2), \deg(v_3) \geq 4$. □

Důkaz Věty 1. Pro spor předpokládejme, že existuje 4-kritický graf G s $p(G) \leq -3$. Zvolme takový graf G s nejmenším počtem vrcholů a hran, takže G je minimální protipříklad. Dejme každé hraně 3 jednotky náboje, celkový náboj je tedy $3e(G)$. Uvažme hranu uv, kde bez újmy na obecnosti $\deg(u) \leq \deg(v)$:

- Jestliže $\deg(u) = \deg(v) = 3$, pak uv pošle $3/2$ vrcholům u a v.
- Jestliže $\deg(u) = 3$ a $\deg(v) > 3$, pak uv pošle $7/4$ vrcholu u a $5/4$ vrcholu v.
- Jestliže $\deg(u), \deg(v) > 3$, pak uv pošle $5/4$ vrcholům u a v.

Výsledný náboj každé hrany je nezáporný. Je-li u vrchol stupně $d \geq 4$, pak jeho výsledný náboj je $\frac{5}{4}d \geq 5$. Je-li u vrchol stupně 3, pak u dostane $7/4$ z alespoň dvou sousedů (Corollary 10) a alespoň $3/2$ z třetího souseda, a proto jeho výsledný náboj je alespoň $2 \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{2} = 5$. Celkový výsledný náboj je tedy alespoň $5n(G)$. Jelikož náboj se nikde neztrácí ani nevzniká, máme $3e(G) \geq 5n(G)$, a proto $p(G) \geq 0$. To je spor. □