Příklad 1: Najděte rekurentní zápisy pro:

- Počet čárových kódů délky n. Za čárový kód považujeme kombinaci průhů šířky 1 a 2 (alternujících barev, pro účel této úlohy bez dalších omezení)
- Počet způsobů vydláždění plochy $2 \times n$ dlaždicemi 1×2
- Počet čárových kódů délky n, pokud navíc požadujeme, aby začínal i končil černým pruhem.
- Počet způsobů vydláždění plochy $3 \times n$ dlaždicemi 1×2

Notes: První dvě rekurence jsou Fibonacciho čísla.
Třetí rekurence vychází jako $a_n = a_n - 4 + 2a_n - 3 + a_n - 1$. Rekurence se odvodí rozborem případů podle zafixování šířky prvního a posledního pruhu (a obrácením barev ostatních pruhů).
Hlavní myšlenka čtvrté rekrence je unkátně rozdělit každé vydláždění na dvě části podle nejlevější hrany vedoucí odshora až dolů. Stačí vypozorovat, že pro každou celkovou šířku $n = 2k$ existují právě dva způsoby jak vydláždit prochu $3 \times 2k$ bez takové hrany, kromě šířkek 2 a 0 kde počet možností je 1. Dostáváme rekurenci pro sudé hodnoty n: $a_n = n + a_{n-2} + 2a_{n-4} + 2a_{n-6} + \cdots + 2a_2$

Příklad 2: Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti:

- $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, tedy $a_i = (-1)^i$
- $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, tedy $a_i = i$
- $(1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 16, \dots)$
- $(\sum_{j=0}^{i} a_j)_i$ pro danou poslopunost $(a_i)_i$ s vytvořující funkcí $a(x)$

Příklad 3: Najděte explicitní vzorce pro následující posloupnosti:

- $a_0 = 0; a_1 = 1; \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2$

  Notes: $f(x) = xf(x) + 2x^2 f(x) + \frac{2}{1-x} - 2 - x$

  $f(x) = \frac{\frac{2}{1-x}+2+x}{2x^2+x-1} = \frac{x^2+x}{2(x-1/2)(x+1)(x-1)} = \frac{x}{2(x-1/2)(x-1)}$

  $f(x) = \frac{-1/2}{x-1/2} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$

  $f(n) = 2^n - 1$

- $a_0 = -1; a_1 = 0; a_2 = 1; \qquad a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$

  Notes: $f(x) = 3x^2 f(x) - 2x^3 f(x) - 1 + 4x^2$

  $f(x) = \frac{4x^2-1}{2x^3-3x^2+1} = \frac{4(x-1/2)(x+1/2)}{2(x+1/2)(x-1)(x-1)} = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

  $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

  $f(n) = -2 + (n+1) = n - 1$

- $a_0 = -1; a_1 = 1; a_2 = 1;$ $\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ [UPRAVENO]

  Notes: $f(x) = \frac{1-2x+x^2}{x^3-x^2-x+1}$

  kořeny: $-1, 1, 1$

  $f(n) = -1/2(-1)^n - 1/2 + n$

- $a_0 = a_1 = 2;$ $\quad a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$

  Notes: $f(x) = \frac{2-2x}{1-2x-2x^2}$

  kořeny: $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ převrácené hodnoty: $\sqrt{3} \pm 1$

  $f(n) = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$

- $a_0 = a_1 = 2;$ $\quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

  Notes: $f(x) = \frac{2-2x}{1-2x-3x^2}$

  kořeny: $\frac{1}{3}, -1$

  $f(n) = 3^n + (-1)^n$

U prvního úkolu uveďte prosím jméno a přezdívku pro zveřejnění na web. Následující úkoly už můžete podepisovat pouze přezdívkou (nebo jménem).
Rekurence níže řešte pomocí metod z přednášky a cvičení. Zadané posloupnosti jsou záměrně jednoduché aby se vám s vytvořujícími funkcemi pracovalo snadno. Ačkoliv tedy lze správnou odpověď snadno vykoukat, cílem není najít odpověď ale procvičení metody.
Hint: neměly by vycházet žádné odmocniny

Úkol 1-1: Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí
$a_0 = 1$ $a_n = 2a_{n-1} + 3$

Úkol 1-2: Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí
$a_0 = 1$ $a_1 = 2$ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

Úkol 1-3: Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí
$a_0 = 2$ $a_1 = 3$ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$