Příklad 1: Porovnejte následující výrazy pro velká n:

2^n, $\binom{2n}{n}$, $\binom{2n}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k!$, n^n, $log(n)^n$, $n^{log(n)}$

Příklad 2: Spočítejte přibližně $\binom{n}{k}$ pomocí Stirlingovy formule. Porovnejte se skutečnou hodnotou pro $n = 2k$ a pro $k = 2$.

Notes: První případ je o konstantu menší než odhad z přednášky, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^2 k$
Druhý případ po zjednodušení

$$\sqrt{\frac{n}{4\pi(n-2)}} \frac{n^n}{4(n-2)^{n-2}}$$

Použitím limity $\lim(1 + 2/x)^x = e^2$ na pravý výraz

$$\frac{e^2}{8} \sqrt{\frac{n}{n-2}} n^2$$

kde první dva výrazy jsou zhruba 1.

Příklad 3: V řadě je n skřínek a v každé je uzamčen právě jeden klíč (klíče jsou náhodně zamíchány), přičemž skřínku číslo 1 umíme odemknout záložním klíčem. Jaká je pravděpodobnost, že používáním nově získaných klíčů postpně odemkneme všechny skřínky?

Notes: V každém kroku buď najdeme klíč od ještě neotevřené skříňky, nebo klíč 1. Po otevření k skříněk zbývá $n - k$ klíčů. Všechny jevy jsou nezávislé. Výpočet pravděpodobnosti, že nenarazíme na klíč 1 je teleskopicný produkt:

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{n-k-1}{n-k} = \frac{1}{n}$$

Příklad 4: Odhadněte $\binom{2k+1}{k}$ pomocí $\binom{2k}{k}$ z obou stran. (Bude se hodit použít Pascalův trojúhelník.)

Notes: $\binom{2k+1}{k} = \binom{2k}{k-1} + \binom{2k}{k}$ kde $\binom{2k}{k}$ je větší.
$\binom{2k+1}{k}$ je sevřen mezi $\binom{2k}{k}$ a dvojnásobkem.

Příklad 5: Odhadněte zespoda sumu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Bude se hodit následující trik: $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

Notes: Hlavní myšlenka je proměnit sumu na teleskopickou. Na členy sumy použijeme trik, a zpracujeme jmenovatele rozdílem čtverců. Dostáváme teleskopickou sumu a výsledek $2\sqrt{(n+1)} - 2$

Příklad 6: Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}^2$. Spočítejte střední hodnotu počtu návratů do počátku. Jaká je pravděpodobnost navštívení jiné fixní pozice?

Notes: V 1D je počet $2n$-krokových procházek navracejících se do počátku $\binom{2n}{n}$ z celkových 2^{2n}.
Ve 2D můžeme dle specifikace zadání interpretovat $2n$-krokové diagonální procházky jako $4n$-krokové, kde se střídají vždy jeden vertikální a jeden horizontální krok. Počet procházek navracejících se do počátku je $\binom{2n}{n}^2$ z celkového počtu 2^{4n}. Odhad prostředního kombinačního čísla dává hodnotu přibližně $2^{2n}/\sqrt{n}$ (až na faktor mezi $1/2$ a $1/\sqrt{2}$). Sumou přes n máme harmonickou řadu , která jde do nekonečna.

Příklad 7: Najděte rekurentní zápisy pro:

- Počet čárových kódů délky n. Za čárový kód považujeme kombinaci průhů šířky 1 a 2 (alternujících barev, pro účel této úlohy bez dalších omezení)
- Počet způsobů vydláždění plochy $2 \times n$ dlaždicemi 1×2
- Počet čárových kódů délky n, pokud navíc požadujeme, aby začínal i končil černým pruhem.
- Počet způsobů vydláždění plochy $3 \times n$ dlaždicemi 1×2

Notes: První dvě rekurence jsou Fibonacciho čísla.
Třetí rekurence vychází jako $a_n = a_n - 4 + 2a_n - 3 + a_n - 1$. Rekurence se odvodí rozborem případů podle zafixování šířky prvního a posledního pruhu (a obrácením barev ostatních pruhů).
Hlavní myšlenka čtvrté rekrence je unkátně rozdělit každé vydláždění na dvě části podle nejlevější hrany vedoucí odshora až dolů. Stačí vypozorovat, že pro každou celkovou šířku $n = 2k$ existují právě dva způsoby jak vydláždit prochu $3 \times 2k$ bez takové hrany, kromě šířkek 2 a 0 kde počet možností je 1. Dostáváme rekurenci pro sudé hodnoty n: $a_n = n + a_{n-2} + 2a_{n-4} + 2a_{n-6} + \cdots + 2a_2$

$$n^{n/2} \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n^k$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

$$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$$

$$(1+x)^x \leq e^x$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

$$\left(1-\frac{c}{n}\right)^n \leq e^{-c}$$