Příklad 1: Definujte graf a relaci.
Najděte analogie variant grafů a vlastností relací.

Notes: Oba objekty jsou reprezentovány jako dvojice prvků nad nějakou nosnou množinou.
Antireflexivita odpovídá grafům bez smyček. Symetrie odpovídá neorientovaným grafům, antisymetrie orientacím jednoduchých grafů. Obecné orientované grafy nejsou nutně ani symetrické ani antisymetrické. Transitivitu splňují v orientovaném případě například grafy dosažitelnosti, v orientovaném případě pouze grafy jejichž všechny komponenty jsou kliky.

Příklad 3: Rozhodněte pravdivost a zvažte korektnost následujících tvrzení:

- Graf je strom pokud odebráním libovolné hrany vzroste počet komponent, a přidáním žádné hrany počet komponent neklesne.
- Graf je strom jestliže odebráním listu získáme zase strom.
- Graf je strom jestliže kontrakcí libovolné hrany získáme opět strom.
- Les je skupina stromů.
- Les je nesouvislý strom.
- Les je strom, který nemusí být souvislý.

Notes:

- Korektní, ekv. s "souvislý acyklický", ale definice "procesem"
- Dle této definice stromy neexistují. Nekoherentní pro nekonečné grafy
- Opět problém se základem indukce, nekorektní pokud nedovolujeme paralelní hrany; korektní pokud dodáme, že samotný vrchol je strom a kontrakce zachovává paralelní hrany i smyčky, a nelze kontrahovat smyčky
- Není definováno co je skupina. Přirozená interpretace by byla množina grafů, což není graf. Jakž takž by procházelo "graf složený ze skupiny stromů", neřeší otázku prádného grafu
- Sporná definice, stromy je souvislý, dle této definice lesy neexistují
- Pokud např. definujeme strom jako "minimální souvislý" graf, potom definice nedává smysl. Ze všech definic stromu navíc plyne souvislost. Formálně tedy dostáváme pouze stromy.

Příklad 5: Dokažte, že skoro všechny celočíselné hodnoty lze sestavit z mincí hodnot 3 a 5. Rozhodněte kolik minimálně mincí hodnoty 3 nebo 5 je třeba.

Notes: Lze dokazovat indukcí a rozdělením čísel dle modulo 3 nebo 5.
Dle modula 3: Všechny násobky 3 lze postavit. Přidáním jedné 5 máme čísla s modulem 2, přidáním dvou čísla s modulem 1. Neumíme tedy pouze čísla s modulem 2 menší než 10 a s modulem 1 menší než 5, jmenovitě 1,2,4,7.

Alternativně můžeme indukcí ukázat, že umíme všechna čísla od 9 dál. Začneme-li s třemi 3, můžeme zvyšovat o 1 následovně: 333;55;533;3333 a postup opakovat. Malá čísla dořešíme ručně.
Vždy stačí nejvýše dvě 5 nebo nejvýše čtyři 3, protože můžeme volně zaměňovat 33333 za 555 a naopak.

Příklad 7: Dokažte následující identity. Pro jaké vztahy n, m, k, r dávají identity smysl?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$$

Notes: První identita odpovídá výběry r prvků z $n+m$ kde levý výraz iteruje přes různé velikosti průniku vybrané množiny s prvními n prvky.
Druhá identita představuje výběr dvou množin velikostí $m-k$ a k z n. Výraz v pravo vybírá dvě disjunktní podmnožiny, výraz vlevo nejprve vybírá které prvky budou v nějaké podmnožině a poté je rozdělí mezi množiny.
V řadě n prvků se dá vybrat podinterval $j \geq 1$ prvků právě $n-j+1$ způsoby. Zvážením všech délek j podintervalů máme sumu vlevo, pouze s opačnou indexací ($k = n-j+1$). Všechny intervaly nenulové délky můžeme unikátně vyjádřit i výběrem krajních prvků.
Suma lze alternativně odvodit i pomocí rekurzivního předpisu, nebo geometricou představou jako schodiště - jeho obsah lze spočítat pomocí trojúhelníků, alternativně dvě schodiště pasují dohromady do obdélníka.

Příklad 9: Odvoďte kombinatoricky $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
Hint: odpověď je $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Notes: Sumu si lze představit třeba jako počet způsobů kterými lze umístit čtverec velikosti k do čtverce velikosti n. To lze popsat třeba jako trojici parametrů, kde dva jsou souřadnice rohu čtverce a třetí je velikost čtverce.
Stačí si rozmyslet, že máme trojice (x, y, s) kde $0 \leq s < x, y \leq n$.
Pokud $x \neq y$, výběrem $\binom{n+1}{3}$ vybereme trojici hodnot a ze dvou větších vybereme x, y. Pokud $x = y$, provedeme výběr hodnot jako $\binom{n+1}{2}$.

$$2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(3 + 2(n-1)) = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$$

Poznámka: možná překvapivě suma krychlí je naopak zase jednodušší:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$$