Ramsey a nekonečná kombinatorika

Příklad 1: Ukažte, že nelze obarvit body Euklidovské roviny třemi barvami tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu. Naopak ukažte, že tři barvy stačí aby neexistovala trojice bodů tvořící monochromatický trojúhelník o jednotkových stranách.

Příklad 2: Ukažte, že strom s nekonečně vrcholy a omezeným větvením má nekonečnou větev.

Příklad 3: Mějme graf G na nekonečné množině vrcholů $\mathbb{N}$. Ukažte, že pokud pro každý $G_i = G[[i]]$ existuje k-obarvení ψ_i, potom existuje i k-obarvení ψ pro G. Je pravda, že nekonečně mnoho ψ_i se shodují s ψ?

Kódy a pakování

Příklad 4: Mějme množinu slov, které jsou vektory nad $\mathbb{Z}_5$, a uvažujme Hammingovu metriku.
Určete velikosti kombinatorických koulí poloměru 2 pro vektory různých dimenzí. Ukažte, že do $\mathbb{Z}_5^5$ se vejde nejvýše 5 disjukntních koulí poloměru 2.

Příklad 5: Uvažme čtvercovou toroidální mřížku $\mathbb{Z}_5^2$, a vzdálenost v ní jako Manhattonskou metriku (tzn. dva vektory jsou ve vzdálenosti 1 právě pokud se jedna jejich souřadnice liší o 1 modulo 5). Najděte příklad největšího možného kódu vzdálenosti 3 a ukažte, že nemůže existovat větší.

Klobouky a hyperkrychle

Uvažujme varianty následující hry. Nějaké množství hráčů dostane náhodně modrý nebo červený klobouk. Každý vidí klobouky všech ostatních hráčů, ale ne svůj vlastní. Každý hráč se snaží uhodnout barvu svého klobouku. Hráči si mohou předem domluvit strategii, ale nemohou komunikovat v průbehu hry. Všichni hádají najednou.

Příklad 6: Dva hráči. Vyhrají tehdy, pokud alespoň jeden uhodne správně. Intuitivně pravděpodobnost výhry je 3/4. Existuje strategie se 100% úspěšností.

Příklad 7: Tři hráči. Mohou hádat modrá/červená/nevím. Prohrají tehdy pokud někdo nemá pravdu, nebo všichni řeknou "nevím". Intuitivně pravděpodobnost výhry je 1/2. Existuje strategie s pravděpodobností 3/4.

Úkol 6-1: Mějme 5-znakovou abecedu (třeba $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Uvažme 4-znakové řetězce (Σ^4).
Ukažte, že pokud kód $C \subset \Sigma^4$ *opravuje* 1 chybu (jednu jakkoliv změněnou pozici), potom obsahuje jeho slova nemohou kódovat více než 4 bity informace (tedy $|C| \leq 31$).
Navrhněte kóc $C \subset \Sigma^4$ *opravující* 1 chybu s alespoň 9-ti kódovými slovy. Dokažte, že navržený kód má správné vlastnosti.

Úkol 6-2: Mějme 5-znakovou abecedu (třeba $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$). Chceme kódovat všechny dvojice symbolů. Chceme 25 slov takových, že začínají všemi kombinacemi prvních dvou symbolů.
Navrhněte kód délky 5, s tou vlastností, že z každé dvojice pozic lze rekonstruovat celé slovo. **Určete parametry kódu.**
Např: máme-li $(\_, \_, 3, \_, 5)$ a právě jedno kódové slovo má symbol 3 na třetí pozici a symbol 5 na páté, potom známe celé slovo.

Úkol 6-3: Mějme Fanovu rovinu nad body $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Ukažmě množinu K charakteristických vektorů přímek Fanovy roviny - tzn. vektory délky 7 nad abecedou $\{0, 1\}$ kde vektor každé přímky má 1-ky právě na pozicích s indexy bodů které do přímky patří. Vezměme jako C vektory z K a jejich doplňky (vyměníme 0 a 1). Ukažte, že C je kód vzdálenosti 3.
Doplňte C o nějaké vhodné vektory na C' tak aby C' byl $(7, 4, 3)_2$-kód.