Ramsey a grafy

Příklad 1: Barvíme dvěma barvami hrany úplného grafu na N vrcholech. Rozhodněte, zda pro dostatečně velké N dostaneme následující jednobarevné struktury:

- úplný graf na k vrcholech obsahující fixní vrchol v
- úplný graf na k vrcholech, včetně smyček
- alespoň n disjunktních úplných grafů na k vrcholech

Příklad 2: Rozhodněte, zda pro dostatečně velké N pro každý graf G na alespoň N vrcholech platí:

- $K_{k,k}$ je podgraf G nebo $K_{k,k}$ je podgraf doplňku G
- $K_{k,k}$ je podgraf G nebo doplněk $K_{k,k}$ je podgraf G

Příklad 3: Mějme úplný bipartitní graf $K_{n,n}$ a uvažme barvení jeho hran dvěma barvami.
Ukažte, že pro $n = 4$ existuje obarvení bez jednobarvného C_4 podgrafu.
Ukažte, že pro $n \geq 6$ už bude jednobarvená C_4 vždy existovat. (Bude existovat i pro $n = 5$)

Příklad 4: Ukažte, že $R(P_5, P_5)$ je nejvýše 20.

Příklad 5: Ukažte, že každá nekonečná omezená posloupnost (s reálnou horní i spodní mezí) má konvergující podposloupnost. Analýza: Monotónní omezená posloupnost má konvergující podposloupnost

Ramsey a k-tice

Příklad 6: Dokažte, že v každé dostatečně velké množině bodů v rovině bude libovolně velká podmnožina bodů na jedné přímce, nebo v obecné poloze.

Příklad 7: Dokažte, že dostatečně velká množina bodů v rovině obsahuje libovolně velkou podmnožinu bodů v konvexní poloze.
Hint: mezi 5 body vždy existuje 4-prvková podmnožina v konvexní poloze

Exotičtější úlohy

Příklad 8: Ukažte, že nelze obarvit body Euklidovské roviny třemi barvami tak, aby žádné dva body v jednotkové vzdálenosti neměly stejnou barvu. Naopak ukažte, že tři barvy stačí aby neexistovala trojice bodů tvořící monochromatický trojúhelník o jednotkových stranách.

Úkol 5-1: Mějme množinu n bodů v rovině, v obecné poloze (žádné 3 nejsou kolineární). Dokažte pomocí dvojího počítání, že počet obdélníků s vrcholy v těchto bodech je nejvýše $n^2/8$.

Úkol 5-2: Určete Ramseyovo číslo C_4. Tedy hledáme číslo N takové, že pokud obarvíme hrany K_N dvěma barvami, nutně existuje jednobarevný podgraf C_4; a $R(C_4)$ je nejmenší takové N.
Pro 4 body stačí korektně určit rozmezí 2 hodnot (tzn. určit n_0 t.ž. $n_0 \leq R(C_4) \leq n_0 + 1$).
Hint: zabere třeba bližší analýza důkazu

$$R(k, j) \leq R(k-1, j) + R(k, j-1)$$

Úkol 5-3: Systém (různých) množin je polo-nezávislý pokud v něm neexistuje trojice množin A, B, C taková, že $A \subset B \subset C$.
Ukažte, že polo-nezávislý systém podmnožin n-prvkové množiny obsahuje nejvýše $2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ množin.