Souvislost

Příklad 1: Ukažte, že každý souvislý kubický bipartitní graf je nutně vrcholově 2-souvislý.
Hint: platí, že k-regulární bipartitní grafy nemohou obsahovat mosty - cvičení z diskrétky

Příklad 2: Rozhodněte, jak se mohou změnit vrcholová a hranová souvislost pokud odebereme jednu hranu nebo jeden vrchol.
Ukažte, že odebíráním hran i vrcholů mohou obě míry souvisloti vzrůst.

Příklad 3: Ukažte, že pokud má graf silně souvislou orientaci hran, potom je hranově 2-souvislý.

Silná Mengerova věta

Příklad 4: Dokažte, že pokud je graf vrcholově 2-souvislý, potom každé dva jeho vrcholy leží na společné kružnici.
Ukažte, že pokud je graf vrcholově 2-souvislý, potom lze pro jakoukoliv dvojici hran najít společnou kružnici.
Hint: Pro zavedeme si umělé vrcholy, nebo ukážeme přímo ze silných variant Mengerovy věty.

Příklad 5: Dokažte ekvivalenci silných a slabých Mengerových vět.
Hint: Podobně jako v předchozím případě pomohou umělé vrcholy, v kombinaci s rozbory nových řezů.

Úkol 4-1: Rozhodněte a dokažte jak se změní hranová a vrcholová souvislot grafu pokud kontrahujeme jednu z jeho hran. Tedy rozhodněte zda může zůstat stejná, klesnou, vzrůst, a zároveň jestli o 1 nebo o libovolnou hodnotu.
(Pro konzistenci uvažme pouze prosté grafy a kontrakce hran které nejsou součást trojúhelníku. Pokud ovšem opravdu chcete, můžete dokazovat i variantu se zachováváním násobných hran a smyček.)

Úkol 4-2: Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu pro každou k-tici vrcholů S existuje kružnice obsahující všechny vrcholy z S.
Vhodnou metodou důkazu je indukce dle počtu vrcholů v S.

Úkol 4-3: Ukažte, že v 3-regulárním grafu jsou hranová a vrcholová souvislost vždy stejné.

Silná Mengerova věta:
Graf G je vrcholově (hranově) k-souvislý právě tehdy když pro každé $A, B \subseteq V(G)$ takové, že $|A|, |B| \geq k$ existuje k vrcholově (hranově) disjunktních cest spojujících disjunktní páry vrcholů z $A \times B$.
Cesty mohou být i jednovrcholové, pokud $A \cap B \neq \emptyset$.