Kombonatorika a Grafy 1 - Cvičení 7 - záskok

Jan Soukup

1 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a splňující

$$\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z).$$

Řezem nazveme podmnožinu E, po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

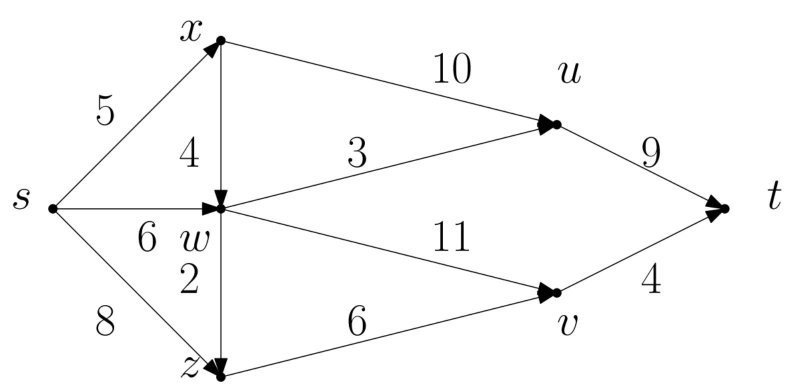
Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P. Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

Algorithm 1.1: FORD–FULKERSON(G)

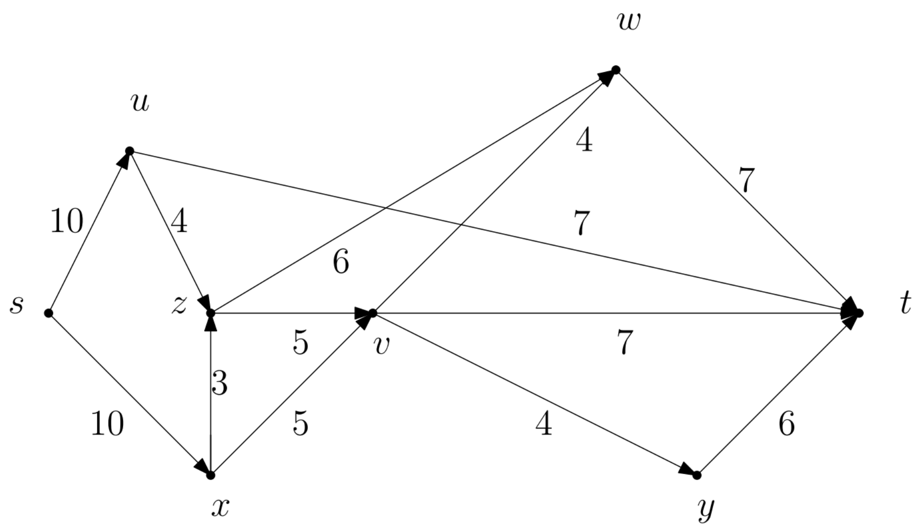
$f \leftarrow$ *nulový tok*
while existuje zlepšující cesta P ze z do s
do $\begin{cases} \epsilon_P \leftarrow \min_{e\in E(P)} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)). \end{cases}$
Vrať tok f.

Příklad 1. Najděte tok maximální velikosti v následujících sítích (Fordovým–Fulkersonovým algoritmem nebo uhádněte) ze zdroje s do stoku t. Nalezněte také řezy minimální kapacity a ověřte tak, že dané toky mají skutečně maximální velikost.

(1)



(2)



Příklad 2. Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?

2 Aplikace Hallovy věty

Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f: I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

Tvrzení 1. Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.

Příklad 3. Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.

(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů?

(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 4. Ukažte, že každý k-regulární (všechny vrcholy mají stupeň k) bipartitní graf má perfektní párování.

Příklad 5. Ukažte, že každý bipartitní graf s partitami velikosti n a minimálním stupněm $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ má perfektní párování.

Příklad 6. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.

Příklad 7 (*)**.** Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu (tedy, že velikost největšího párování se v bipartitním grafu rovná velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí).