

3. domácí úlohy - Vánoční nadílka

11.1.2023

Úloha 1. Uvažujme následující algoritmus pro 3-SAT: Na vstupu ϕ , který je 3-CNF s n proměnnými, zvol náhodné ohodnocení proměnných a , a poté opakuj $n/2$ -krát: pokud $\phi(a)$ není splněná, vezmi první nesplněnou klauzuli a přehoď hodnotu jedné náhodně vybrané proměnné z této klauzule. Pokud narazíš na splňující ohodnocení, odpověz, že ϕ je splnitelná, jinak odpověz, že je nesplnitelná.

- Urči pravděpodobnost nalezení splňujícího ohodnocení.
- Vytvoř z toho algoritmus pro 3-SAT pracující v čase $\text{poly}(n) \cdot 3^{n/2}$ s chybou nejvýše $1/n$. Je to lepší, než naivní algoritmus pro 3-SAT?
- Zobecní to pro k -SAT formule. Je takový algoritmus lepší, než naivní algoritmus pro k -SAT?

Úloha 2. Varianta Propp-Wilsonova algoritmu: Uvažujme markovovský proces s maticí přechodu:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Jaká je jeho stacionární distribuce?
- Pokud pustíme náhodnou procházku z obou stavů jako v Propp-Wilsonově algoritmu za použití stejné náhodnosti a zastavíme se, až se procházky spárují, jaká bude distribuce v danou chvíli?
- Nechť $N_i = 2^i$. Uvažujme, že necháme procházky běžet N_1 kroků, pak $N_2 - N_1$ kroků, pak $N_3 - N_2$ kroků, atd., dokud se nespárují. Vystoupíme distribuci v prvním čase N_i po spárování. Dostaneme stacionární distribuci? Zdůvodněte.

Úloha 3. Uvažujme procházku na mřížce velikosti $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$. Ukažte, že průměrná doba pokrytí je $O(n \log^2 n)$.