TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2012/2013**

3. domácí úlohy - Náhodné procházky na grafech

do 4. ledna 2013

Úloha 1. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný souvislý graf na n vrcholech. Ukažte, že pro každý vrchol v

$$\sum_{w \sim v} E[T_{w,v}] = 2|E| - 1,$$

kde $T_{w,v}$ je doba přechodu z w do v. Kolik je $\sum_{(u,v) \in E} E[T_{u,v}]$? (*Hint:* Podívejte se na $E[T_{v,v}]$.)

Úloha 2. Uvažujme náhodnou procházku na souvislém neorientovaném grafu, kde pravděpodobnost přechodu z u do v je

$$p_{u,v} = \frac{\frac{1}{\deg v}}{\sum_{w \sim u} \frac{1}{\deg w}}.$$

a) Nalezněte $E[T_{u,u}]$ pro každý vrchol u.

b) Nalezněte nejlepší možný odhad na $E[T_{u,v}]$ pro každé dva sousední vrcholy u a v.

c) Nalezněte nejlepší možný odhad na $E[T_{u,v}]$ pro každé dva vrcholy u a v.

d) Nalezněte horní odhad na očekávanou dobu pokrytí daného grafu.

e) Ukažte, že váš horní odhad z d) je asymptoticky nejlepší možný.

Úloha 3. Uvažujme dvojrozměrnou mřížku v rovině velikosti $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$. Ukažte, že očekávaná doba pokrytí této mřížky je $O(n \log^2 n)$.