TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2012/2013**

2. domácí úlohy - Náhodné procházky na grafech

do 7. prosince 2012

Úloha 1. *Lízátko:* Lízátko o n vrcholech, n sudé, je graf sestávající z úplného grafu velikosti $n/2$ a k němu připojené cesty velikosti $n/2$. Ukažte, že očekávaná doba přechodu z libovolného vrcholu stupně $n/2-1$ do vrcholu stupně jedna je $\Theta(n^3)$. *Hint:* Uvažte markovovský proces s $n/2+2$ stavy, kde $n/2$ stavů reprezentuje jednotlivé vrcholy cesty, jeden ze stavů reprezentuje vrchol s úplného grafu připojeného k cestě a zbylý stav reprezentuje událost "Jsme v jednom z vrcholů úplného grafu různém od s." Určete pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými stavy tohoto markovovského procesu, nalezněte stacionární rozdělení tohoto procesu a pro každý stav i určete očekávanou dobu návratu $E[T_{i,i}]$. Z těchto údajů odvoďtě požadovaný výsledek.

Úloha 2. Pro d-regulární úplný (zakořeněný) strom s n vrcholy dokažte, že jeho očekávaná doba pokrytí je $\Omega(n \log^2 n / \log d)$. ($d$-regulární úplný (zakořeněný) strom má všechny vrcholy stupně 1 nebo d a všechny listy jsou stejně vzdálené od kořene tohoto stromu.)

Úloha 3. Uvažujme cestu na n vrcholech očíslovaných zleva doprava čísly $1, \ldots, n$. Ukažte, že pro každé $1 \leq j \leq n$, očekávaná délka procházky z vrcholu j končící po dosažení vrcholu 1 nebo n je $(n-j)(j-1)$. Dále ukažte, že očekávaná doba pokrytí této cesty procházkou začínající v j je $E[T_j] = (n-j)(j-1)+(n-1)^2$.

Úloha 4. *Pavučina:* Pavučina je graf na $2n$ vrcholech sestávající z úplného grafu K_n na vrcholech $1, \ldots, n$, kde ke každému z vrcholů $1 \leq i \leq n$ je připojen vrchol $n+i$. Žádné další hrany nemá. Ukažte, že očekávaná doba pokrytí pavučiny je $\Theta(n^2 \log n)$. *Hint:* Nalezněte očekávanou dobu přechodu mezi vrcholy $i, j > n$.

Úloha 5. Dokažte nebo vyvraťte, pro $0 < p < 1$:

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k-1} pk = \frac{1}{p}.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}.$$