TIN 085 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2007/2006**

1. domácí úlohy - opakování

do 1. listopadu 2007

Úloha 1. Nechť $GF[q]$ je konečné těleso velikosti q.

a) Vezměme matici A s k řádky a n sloupci. Označme jako d dimenzi vektorového prostoru generovaného řádky matice A. Ukažte, že pro každý vektor $b \in GF[q]^n$, množina řešení $\{x \in GF[q]^k;\ xA = b\}$ má velikost buď přesně q^{k-d} nebo nula. (*Hint:* Nejprve ukažte, že pro každé b je množina řešení buď prázdná nebo má velikost alespoň q^{k-d}.)

b) Vezměme množinu vektorů $K \subseteq GF[q]^n$ takovou, že pro každé $x, y \in K$, $\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = 0$. (Aritmetika se počítá v rámci tělesa $GF[q]$.) Jak velké může K být?

Úloha 2. Na přednášce jsme ukázali, že pro $0 < p < 1$ je $Vol_2(n, pn) \leq 2^{H(p)n}$.

a) Ukažte, že $\frac{2^{H(p)n}}{n+1} \leq Vol_2(n, pn)$.

b) Nalezněte (*rozumný*) dolní a horní odhad pro velikost $Vol_q(n, pn)$, tedy pro velikost Hammingovské koule o poloměru pn v prostoru $\{0, \ldots, q-1\}^n$.

Úloha 3. Ukažte, že pro všechna n lze vektory z $\{0,1\}^n$ uspořádat do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}$ takové, že po sobě jdoucí vektory se liší právě v jedné pozici, to jest $\delta(v_i, v_{i+1}) = 1$ pro všechna $1 \leq i < 2^n$. (Tomuto uspořádání se říká *Grayův kód. Hint:* Použijte indukci.)

Úloha 4. Nechť $d \geq 1$ je dáno. Ukažte, že pro dostatečně velká n existuje množina $K \subseteq \{0,1\}^n$ velikosti alespoň $2^{n/d}$ taková, že pro každé $x, y \in K$, $\delta(x, y) = 2d$.

Úloha 5. Prémiová úloha s klobouky zadaná na přednášce.