TIN 085 - Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti I **zima 2006/2007**

4. domácí úlohy - booleovské obvody

do 23. ledna 2007

1. Ukažte, že existuje funkce $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ v $EXP = \bigcup_{c>0} DTIME(2^{n^c})$ taková, že:

   (a) f nelze počítat žádným booleovským obvodem velikosti $\sqrt{n}$.

   (b) f nelze počítat žádným booleovským obvodem velikosti $O(n^2)$.

   (*Hint*: Použijte diagonalizaci.)

2. Ukažte, že pro jistou konstantu $c > 0$ existuje funkce f takové, že žádný booleovský obvod velikosti 2^{cn} nesouhlasí s f na zlomku vstupů větším než $1/2 + 1/2^{n/4}$. Jak je výpočetně těžké takovou funkci najít? (*Hint*: Vyberte funkci f náhodně.)

3. Ukažte funkci f v EXP takovou, že žádný obvod velikosti n^2 nesouhlasí s f na zlomku vstupů větším než $3/4$. (*Hint*: Použijte funkci f, jejíž hodnoty v jednotlivých bodech jsou vybrány náhodně a po dvou nezávisle.)

4. Je dobře známo, že když vybereme náhodnou podmnožinu n-prvkové množiny, pak její očekávaná velikost je $n/2$. Taktéž je dobře známo (viz Černovova nerovnost), že pravděpodobnost, že vybraná podmnožina bude obsahovat více než $(\frac{1}{2} + \epsilon)n$ prvků, je exponenciálně malá, pro libovolnou konstantu $\epsilon > 0$. Často se však opomíjí fakt, že pro libovolnou konstantu $c > 0$, pravděpodobnost, že náhodně vybraná podmnožina bude mít více než $\frac{n}{2} + c\sqrt{n}$ prvků, se blíží ke konstantě různé od nuly pro $n \to \infty$. V tomto cvičení toto nahlédneme.

   Nejprve poznamenáme, že $\binom{n}{n/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} 2^n$.

   (a) Ukažte, že pro libovolné celé číslo $c \geq 0$, existuje $d > 0$, takové že $\sum_{k=c\sqrt{n}}^{(c+1)\sqrt{n}-1} \binom{n}{n/2+k} \approx d$. (*Hint*: Ukažte, že podíl $\binom{n}{n/2+c\sqrt{n}}$ a $\binom{n}{n/2+(c+1)\sqrt{n}}$ se dá shora omezit konstantou.)

   (b) Co lze tedy říci o pravděpodobnosti, že náhodná podmnožina n-prvkové množiny bude mít více/méně prvků než $n/2 + c\sqrt{n}$, když c je konstanta a když c jde byť libovolně pomalu do nekonečna s n?