

3. domácí úlohy

do 20. května 2011

Úloha 1. Nejprve připomeňme *RL* algoritmus pro testování *USTCONN*, to jest testování dosažitelnosti t z s v neorientovaném grafu G : algoritmus vyjde z vrcholu s a náhodně prochází vstupní graf po $10n^3$ kroků; pokud narazí na vrchol t , vstup přijme, jinak vstup odmítne. Tento algoritmus dá správný výsledek s pravděpodobností alespoň $1/2$. Jestliže si v každém vrcholu očíslováme hrany, které z vrcholu vychází, můžeme procházku grafem popsat posloupností takovýchto čísel. Takové posloupnosti se říká *traverzální posloupnost*. Posloupnost $w \in \{1, \dots, d\}^*$ je *univerzální traverzální posloupnost pro d -regulární grafy velikosti n* , pokud pro každý d -regulární graf na n vrcholech a každý výchozí vrchol tohoto grafu procházka grafem podle w navštíví všechny vrcholy daného grafu.

- Ukažte, že existuje univerzální traverzální posloupnost pro d -regulární grafy na n vrcholech.
- Ukažte, že existuje univerzální traverzální posloupnost pro d -regulární grafy na n vrcholech délky nejvýše $20dn^4 \log n$. (*Hint*: Použijte pravděpodobnostní metodu.)

Úloha 2. Zkonstruujte univerzální traverzální posloupnost pro d -regulární grafy na n vrcholech délky nejvýše $n^{O(\log n)}$. (*Hint*: Použijte Nisanův pseudonáhodný generátor.)

Úloha 3. Připomeňme, že d -regulární neorientovaný graf G na n vrcholech je (d, λ) -expander, pokud druhé v absolutní hodnotě největší vlastní číslo normalizované matice sousednosti G má absolutní hodnotu nejvýše λ . Pokud S a T jsou dvě podmnožiny vrcholů grafu G a $E(S, T)$ označuje počet hran z S do T (orientovaných, pokud S a T se překrývají), pak platí následující nerovnost:

$$\left| E(S, T) - \frac{d \cdot |S| \cdot |T|}{n} \right| \leq \lambda d \sqrt{|S| \cdot |T|}.$$

Této nerovnosti se říká *Expander mixing lemma*.

- Ukažte, jak se dá tato nerovnost použít pro obdržení výsledku podobného aproximaci "součinu dvou množin" z konstrukce Nisanova pseudonáhodného generátoru.
- Navrhnete konstrukci pseudonáhodného generátoru pro pravděpodobnostní logaritmický prostor (násobení matic) s použitím expanderů, který bude mít podobné parametry jako Nisanův. Využijte známého faktu, že pro vhodnou konstantu d a $\lambda = 1/2$ se dá pro libovolné n (d, λ) -expander na n vrcholech efektivně zkonstruovat (v logaritmickém prostoru).
- Porovnejte generátor z b) s generátorem Nisana z hlediska protoru pro výpočet náhodného řetízku a rozhodněte, nakolik je tento generátor použitelný pro konstrukci Saks-Zhou ukazující $RL \subseteq LOG^{3/2}$.