TIN 086 Vybrané kapitoly z výpočetní složitosti II **léto 2007/2008**

2. domácí úlohy

do 10. dubna 2008

Nejprve připomeňme, že booleovský obvod je jednoduché zobecnění booleovské formule, kde podformule se mohou použít pro další výpočet vícekrát. Pro $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $L \in SIZE(f(n))$, pokud existuje nekonečná posloupnost obvodů $C_1, C_2, \ldots$ taková, že velikost obvodu C_n je $O(f(n))$, obvod C_n pracuje na vstupech délky n a pro každý vstup x délky n, $x \in L$ iff $C_n(x) = 1$, tj. obvod C_n se na vstupu x vyhodnotí na jedničku.

Úloha 1. Nechť n je kladné číslo a $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ je n-tice obvodů, kde obvod C_i pracuje na vstupech délky $i \leq n$. Řekneme, že $(C_1, \ldots, C_n)$ *řeší* SAT, právě když pro každou booleovskou formuli ϕ délky $i \leq n$, $C_i(\phi) = 1$ iff $\phi \in SAT$. Definujme si množinu $SAT\text{-}CKT = \{(C_1, \ldots, C_n);\ n \in \mathbb{N}$, každý C_i je booleovský obvod velikosti alespoň i a $(C_1, \ldots, C_n)$ řeší $SAT\}$.

a) Ukažte, že $SAT\text{-}CKT$ je v *co-*NP.

b) Ukažte, že pokud $SAT \in SIZE(n^k)$ pro nějaké k, pak $\Sigma_2 = \Pi_2$.

(*Hint pro a*: Uvažujte o formulích $\phi(x_1, \ldots, x_m)$, $\phi(0, x_2, \ldots, x_m)$ a $\phi(1, x_2, \ldots, x_m)$.)

Úloha 2. Nechť k je přirozené číslo. Ukažte, že existuje jazyk $L \in EXP$ takový, že $L \notin SIZE(n^k)$. (*Hint*: Použijte *chytrou* diagonalizaci. Kolik je booleovských obvodů na n vstupech velikosti nejvýše n^k?)

Úloha 3. Nechť k je přirozené číslo.

a) Ukažte, že existuje jazyk $L \in \Pi_2$ takový, že $L \notin SIZE(n^k)$.

b) Ukažte, že existuje jazyk $L \in \Sigma_2$ takový, že $L \notin SIZE(n^k)$.