NMMB415 Automaty a výpočetní složitost **zima 2020/2021**

3. domácí úkol - Časová složitost, P a NP

Termín odevzdání: do 25.11.2020, 10:30 v Moodle.

Problem 1. Určete pro každou funkci, zda je to pravda nebo ne:

a) $n^2 = o(2n^2)$

b) $2n^2 = o(n^3)$

c) $2^n = o(3^n)$

d) $2n = O(n)$

e) $n \log n = o(n^2)$

f) $1 = o(1/n)$

Problem 2. Pro množinu $S \subseteq \{0,1\}^n$ sestrojte Booleovskou formuli $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v CNF tvaru takovou, že pro každé $a \in \{0,1\}^n$: $\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je TRUE právě tehdy, když $a \in S$. Jak velká je Vaše formule vzhledem k n? Za bonusové body ukažte, že pro každé $n \geq 10$ a některou množinu $S \subseteq \{0,1\}^n$ musí být taková formule velikosti alespoň $\frac{2^n}{10n}$.

Problem 3. Ukažte, že pokud $P = NP$ pak existuje algoritmus, který pro každou vstupní Booleovskou formuli $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nalezne v polynomiálním čase splňující ohodnocení.

Problem 4. Nechť $SPATH = \{\langle G, s, t, k\rangle$, G je neorientovaný graf, ve kterém jsou vrcholy a a b spojeny cestou délky nejvýše $k\}$ a nechť $LPATH = \{\langle G, s, t, k\rangle$, G je neorientovaný graf, ve kterém jsou vrcholy a a b spojeny cestou délky alespoň $k\}$. (Na cestě se nesmí žádný vrchol opakovat dvakrát.) Ukažte, že $SPATH \in P$ a $LPATH$ je NP-úplný.

Problem 5. Nechť $DOUBLE\text{-}SAT = \{\langle\phi\rangle$, ϕ je Booleovská formule, která má alespoň dvě různá splňující ohodnocení$\}$. Ukažte, že $DOUBLE\text{-}SAT$ je NP-úplný.