Matematická analýza I - cvičení 2 10.10.2017

Úloha 1: Pro zobrazení $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ a $h = g \circ f$ rozhodněte, zda uvedená implikace platí, a své tvrzení dokažte:

a) f, g prosté $\Rightarrow h$ prosté

b) f, g na (surjektivní) $\Rightarrow h$ na

c) f, g bijekce $\Rightarrow h$ bijekce

d) Platí opačné implikace ve výše uvedených případech?

Úloha 2: Nechť $f(x) = (1-x)^{-1}$. Určete $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$.

Úloha 3: Nechť $f : X \to X$ je konstantní zobrazení. Pro která zobrazení $g : X \to X$ platí $f \circ g = g \circ f$?

Úloha 4: Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ a $A, B \subseteq X$ rozhodněte, zda uvedená rovnost platí, a své tvrzení dokažte:

a) $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

b) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

c) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

d) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

Úloha 5: (Zadáno nakonec jako DÚ.) Charakterizujte zobrazení $f : A \to B$, pro která platí:

a) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$

b) $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$

Úloha 6: Vymyslete příklad funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která splňuje, že:

a) f je prostá, ale není na

b) f je na, ale není prostá

c) (*) f je na a zároveň pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $|f^{-1}(\{n\})| = \infty$

Úloha 7: Rozhodněte a své tvrzení dokažte:

a) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, které je na?

b) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, které je na?

c) (**) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, které je na?

Úloha 8: (*) Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v množině $\mathbb{R}$, tj. ukažte, že pro každé $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.