Matematická analýza I - cvičení 1 3.10.2017

Úloha 1: Následující výroky nejprve zapište pomocí kvantifikátorů, poté je znegujte a nakonec je zapište bez použití formalismu, podobně jako výchozí výroky.

a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.

b) Každé prvočíslo je liché.

c) Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.

d) Mezi n a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.

Úloha 2: Vyhovuje funkce $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x : x > K \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Úloha 3: Dokažte matematickou indukcí:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Úloha 4: Dokažte indukcí de Moivreovu větu: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

Úloha 5: Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R},\ x > -1$ platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Úloha 6: V oboru reálných čísel vyřešte následující nerovnice:

a) $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$

b) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$

c) $\frac{1}{x+2} < \frac{x}{x-1}$

Úloha 7: V oboru reálných čísel vyřešte následující nerovnice a rovnice:

a) $\sqrt{x-2} + x > 4$

b) $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 1$

Úloha 8: V oboru reálných čísel vyřešte následující nerovnice:

a) $|5x-2| < x$

b) $|x-1| < |x+5|$

c) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1$

d) $|x^2+2x-3| \geq |x^2+3x-4|$

e) $||x-2|+1| \leq 5$

Úloha 9: V oboru reálných čísel vyřešte následující nerovnice:

a) $\frac{2-\log x}{1+\log x} \geq 0$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$

Úloha 10: V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici: $\sin^2 x < \cos^2 x$.