

## Devátá série domácích úkolů

**Příklad 1.** Dokažte pomocí vytvářejících funkcí, že počet způsobů jak vyjádřit číslo  $n \geq 1$  jako součet lichých čísel je stejný, jako počet způsobů jak vyjádřit číslo  $n + 1$  jako součet čísel větších než 1. Součty pokládáme za různé, i když se liší jen pořadím sčítanců.

(Možná) obtížnější varianta: dokažte předchozí tvrzení pomocí explicitní bijekce mezi příslušnými množinami součtů.

**Příklad 2.** Najděte vytvářející funkce následujících posloupností.

- (a)  $(1, -1/2, 1/4, -1/8, \dots, (-1)^n/2^n, \dots)$
- (b)  $(0, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$

**Příklad 3.** Najděte vytvářející funkci následující posloupnosti  $(a_n)_{n \geq 0}$ , a s její pomocí odvoďte vzorec pro  $a_n$  v uzavřeném tvaru. Posloupnost je definována takto:

$$a_0 = 1 \text{ a pro každé } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{n-1}{2}.$$

O trochu obtížnější varianta: řešte obdobnou úlohu pro posloupnost definovanou vztahy

$$a_0 = \frac{1}{2} \text{ a pro každé } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+1} = 1 - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n a_k.$$