Devátá série domácích úkolů

Příklad 1. Dokažte pomocí vytvořujících funkcí, že počet způsobů jak vyjádřit číslo $n \geq 1$ jako součet lichých čísel je stejný, jako počet způsobů jak vyjádřit číslo $n+1$ jako součet čísel větších než 1. Součty pokládáme za různé, i když se liší jen pořadím sčítanců.

(Možná) obtížnější varianta: dokažte předchozí tvrzení pomocí explicitní bijekce mezi příslušnými množinami součtů.

Příklad 2. Najděte vytvořující funkce následujících posloupností.

(a) $(1, -1/2, 1/4, -1/8, \ldots, (-1)^n/2^n, \ldots)$

(b) $(0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots)$

Příklad 3. Najděte vytvořující funkci následující posloupnosti $(a_n)_{n\geq 0}$, a s její pomocí odvoďte vzorec pro a_n v uzavřeném tvaru. Posloupnost je definována takto:

$$a_0 = 1 \text{ a pro každé } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - \frac{n-1}{2}.$$

O trochu obtížnější varianta: řešte obdobnou úlohu pro posloupnost definovanou vztahy

$$a_0 = \frac{1}{2} \text{ a pro každé } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$