Druhá série domácích úkolů

Příklad 1. Kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{3,3}$? Obecněji, kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{m,n}$? A kolik koster má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu odstraněním jedné hrany?

Příklad 2. Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva grafy, které mají právě jeden společný vrchol $x \in V_1 \cap V_2$. Definujme graf $G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Ukažte, jak lze spočítat počet koster G, známe-li počet koster G_1 i G_2. (Zkuste tento příklad vyřešit jednak pomocí determinantu, jednak přímo z definice kostry.)

Příklad 3. (Dokončení příkladu načatého na cvičení) Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, jehož hrany mají přiřazené váhy, přičemž žádné dvě hrany nemají stejnou váhu. Připomeňme některé definice ze cvičení: řekneme, že hrana e je *těžká*, pokud v G existuje kružnice C obsahující hranu e taková, že e je nejtěžší ze všech hran C. Řekneme, že e je *lehká*, pokud existuje množina vrcholů $R \subseteq V$ taková, že e má právě jeden konec v R a je nejlehčí ze všech hran majících právě jeden konec v R.

Nechť T je minimální kostra G. Ukažte, že pro libovolnou hranu $e \in E$ jsou následující výroky ekvivalentní:

1. e je lehká,
2. e není těžká,
3. e patří do T.

(Na cvičení jsme dokázali, že když e je těžká, tak e není lehká. To už znovu dokazovat nemusíte. Také jsme dokázali, že když e je lehká, tak e patří do T, ale jen s použitím vlastností hladového algoritmu. Zkuste najít jednodušší elementární důkaz.)