Lineární algebra II, druhá série domácích úkolů
Termín odevzdání: 12. 4.

Každé řešení je potřeba náležitě zdůvodnit, nestačí jen napsat konečný výsledek.

Příklad 1. (1 bod) Nechť A a B jsou matice, které mají společnou bázi z vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nechť λ_i označuje vlastní číslo matice A odpovídající vlastnímu vektoru v_i a nechť μ_i označuje vlastní číslo matice B odpovídající vlastnímu vektoru v_i. Ukažte, že i matice $A + B$ a matice AB mají tu samou bázi z vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Jaká jsou jejich vlastní čísla?

Příklad 2. (3 body) Nechť $J_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ označuje matici tvaru $n \times n$, jejíž všechny složky jsou rovny jedné. Najděte vlastní čísla a bázi z vlastních vektorů matice J_n. (Nemusíte počítat diagonální rozklad. Ale nezapomeňte ověřit, že vlastní vektory, které jste našli, opravdu tvoří bázi.)

Příklad 3. (2 body) L je lineární zobrazení na $\mathbb{R}^3$, které má vlastní vektory $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ a $(0, 1, 1)$, s odpovídajícími vlastními čísly 1, 2 a 0. Jaká je matice tohoto zobrazení (vzhledem ke kanonické bázi)?

Příklad 4. (3 body za každou matici) Spočítejte vlastní vektory a vlastní čísla následujících matic. Rozložte matice do tvaru TDT^{-1}, kde D je diagonální matice.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2873.34 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} & 2873.34 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$