Lineární algebra II, první série domácích úkolů
Termín odevzdání: 22. 3.

Každé řešení je potřeba náležitě zdůvodnit, nestačí jen napsat konečný výsledek.

Příklad 1. (3 body) Nechť $\mathbb{T}$ je nějaké těleso a x, y nějaké prvky $\mathbb{T}$. Spočítejte determinant následující matice tvaru $n \times n$ nad tělesem $\mathbb{T}$:

$$\begin{pmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ y & y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Příklad 2. (2 body) Pomocí výsledku předchozího příkladu rozhodněte, pro která čísla x z tělesa $\mathbb{Z}_{31}$ platí, že čtveřice vektorů $v_1 = (x, 13, 13, 13)$, $v_2 = (13, x, 13, 13)$, $v_3 = (13, 13, x, 13)$, $v_4 = (13, 13, 13, x)$ tvoří bázi prostoru $(\mathbb{Z}_{31})^4$.

Příklad 3. (3 body) Nechť $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je celočíselná matice, pro kterou platí, že součet prvků v libovolném sloupci je násobek 42. Dokažte, že determinant M je také násobek 42.

Příklad 4. (1 bod) Ukažte, jak přímo z definice determinantu vyplývá následující rovnost (kterou znáte ze cvičení):

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. (2 body) Nechť A je matice tvaru $n \times n$, která má determinant D. Matice B vznikla z A tak, že se řádky A napsaly v opačném pořadí (tj. první řádek A je shodný s posledním řádkem B, druhý řádek A je shodný s předposledním řádkem B a tak dále). Jaký je determinant B?