Bodované domácí úkoly — 5. série

Vyřešné příklady dodejte nejpozději do začátku cvičení v pátek 30. března 2007.

1. **Tvrzení:** Pro každý reálný polynom $p(y)$ stupně d existují koeficienty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ takové, že platí:

$$p(y) = \alpha_0 \binom{y}{0} + \alpha_1 \binom{y}{1} + \cdots + \alpha_d \binom{y}{d}.$$

$\boxed{2}$ (a) Dokažte tvrzení.

$\boxed{1}$ (b) Ukažte, jak z tvrzení plyne, že když p je polynom stupně d, tak

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = \frac{r(x)}{(1-x)^{d+1}},$$

kde r je nějaký polynom stupně nejvýše d.

$\boxed{2}$ (c) Dokažte (třeba použitím výše uvedeného tvrzení), že pro každý polynom p existuje polynom q takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$q(n) = \sum_{i=0}^{n} p(i).$$

2. Najděte uzavřený tvar pro vytvořující funkce $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, kde a_n je zadáno následovně:

$\boxed{1}$ (a) $a_n = n^3 - 2n^2 + 2$

$\boxed{1}$ (b) $a_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 + i$

$\boxed{2}$ (c) $a_n = 2^n n + 3^n n^2$

3. Najděte koeficienty mocninných řad následujících funkcí. Vyjádřete výsledek tak, aby neobsahoval kombinační čísla s jinými než přirozenými částmi.

$\boxed{1}$ (a) $\frac{x^2}{(1-x)^4}$.

$\boxed{2}$ (b) $\frac{1}{(2-3x)^2}$.

$\boxed{2}$ (c) $\frac{1}{(1-2x)(1-4x)}$. (Nápověda: parciální zlomky)

$\boxed{3}$ 4. Pomocí vytvořujících funkcí odvoďte vzorec pro $\sum_{i=0}^{n} F_i$, kde F_i je i-té Fibonacciho číslo.

5. Nechť c_n je počet (neizomorfních) pěstovaných stromů na $n \geq 1$ vrcholech (tak, jak byly definovány na cvičení) a $g(x) = \sum_{n \geq 1} c_n x^n$.

$\boxed{3}$ (a) Nechť k je pevné přirozené číslo. Označme d_n počet uspořádaných k-tic $(T_1, \ldots, T_k)$, kde $T_1, \ldots, T_k$ jsou pěstované stromy, a celá k-tice má dohromady n vrcholů (tj. $\sum_{i=1}^{k} |V(T_i)| = n$). Ověřte, že $\sum_{n \geq 0} d_n x^n = g(x)^k$.

$\boxed{2}$ (b) Spočítejte vytvořující funkci $g(x)$ a dokažte, že $b_n = c_{n+1}$ pro každé $n \geq 0$, kde b_n označuje počet binárních stromů na n vrcholech (tak, jak byly definovány na přednášce).