Bodované domácí úkoly — 11. série

Vyřešené příklady dodejte nejpozději do začátku cvičení v pátek 18. května 2007.

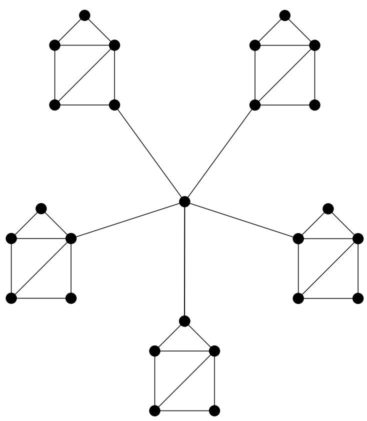
Příklady jsou (až na bodové ohodnocení) shodné se zadáním zápočtové písemky. Můžete tedy získat dodatečné body za ty příklady, které jste nevyřešili správně v písemce. To, co jste napsali do písemky, už znovu sepisovat nemusíte.

$\boxed{3}$ 1. Pro $n \geq 0$ označme a_n počet způsobů, jak lze číslo n vyjádřit jako součet, v němž každý sčítanec je roven 1 nebo 3, přičemž na pořadí sčítanců záleží (příklad: $a_4 = 3$, protože číslo 4 lze rozložit na následující součty: 1+3, 3+1, nebo 1+1+1+1). Podobně pro $n \geq 1$ označme b_n počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet, v němž každý sčítanec je číslo z množiny $\{1, 4, 7, 10, \dots\} = \{3k-2,\ k \in \mathbb{N}\}$ (příklad: $b_5 = 3$, protože 5 lze rozložit jako $4+1$, $1+4$ nebo $1+1+1+1+1$). Konečně pro $n \geq 3$ označme c_n počet způsobů, jak zapsat n jako součet přirozených čísel ostře větších než 2 (například $c_7 = 3$, protože 7 lze psát jako $3+4$, $4+3$ nebo 7).

Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $a_n = b_{n+1} = c_{n+3}$.

$\boxed{2}$ 2. Dokažte, že množina přímek konečné projektivní roviny má systém různých reprezentantů. (Jinými slovy, dokažte, že každé přímce můžeme přiřadit bod, který na ní leží, přičemž různým přímkám přiřadíme různé body.)

$\boxed{1+1}$ 3. Dokažte, že počet koster grafu na následujícím obrázku je pátá mocnina nějakého přirozeného čísla (1 bod). Spočítejte počet koster tohoto grafu (1 bod).



4. Nechť je dán orientovaný graf $G = (V, E)$. Předpokládejme, že pro každou hranu $e \in E$ je zadána nezáporná reálná kapacita $c(e) \geq 0$ a pro každý vrchol $v \in V$ je zadán reálný deficit $d(v) \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že součet všech deficitů je roven nule. Naším cílem je najít *deficitní tok*, což je nezáporná funkce $f\colon E \to \mathbb{R}^+$, která má následující vlastnosti:

- Tok po libovolné hraně e je omezen její kapacitou, tj. $\forall e \in E\colon\ f(e) \leq c(e)$.
- Pro libovolný vrchol $v \in V$ platí, že rozdíl mezi tokem, který z něj vytéká, a tokem, který do něj vtéká, je přesně roven deficitu $d(v)$. Jinými slovy,

$$\forall v \in V\colon \quad \sum_{\substack{e \in E \\ e \text{ vychází z } v}} f(e) \; - \sum_{\substack{e \in E \\ e \text{ vstupuje do } v}} f(e) = d(v).$$

$\boxed{2}$ (a) Najděte polynomiální algoritmus, který v daném grafu G s hranovými kapacitami a vrcholovými deficity najde deficitní tok, případně rozhodne, že žádný deficitní tok neexistuje.

$\boxed{3}$ (b) Dokažte, že v G existuje deficitní tok, právě když pro každou množinu vrcholů $A \subseteq V$ platí, že součet kapacit hran vedoucích z A do $V \setminus A$ je aspoň tak velký jako součet deficitů vrcholů v A.