Příklady řešené na cvičení 23. 2. 2007

- Rozhodněte, jestli jsou následující dva důkazy správné, a pokud nejsou, zjistěte, kde je chyba:

  Tvrzení 1. *Definujme posloupnost* $a_1, a_2, \dots$ *pomocí následujících vztahů:*

  $$a_1 = \frac{3}{2}$$
  $$a_n = \frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 \qquad \textit{pro } n \geq 2$$

  Tvrdíme, že $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \geq 1$.

  Důkaz. Postupujme indukcí: pro $n = 1$ vyplývá tvrzení z definice. Předpokládejme, že $n \geq 2$ a že $a_{n-1} \geq 0$. Chceme dokázat nerovnost

  $$\frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 \geq 0. \tag{1}$$

  Tuto nerovnost teď zjednodušíme:

  $$\begin{aligned} \frac{2}{a_{n-1}+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{2}{a_{n-1}+1} &\geq 1 && \text{(převedli jsme jedničku na druhou stranu)} \\ 2 &\geq a_{n-1}+1 && \text{(vynásobili jsme nerovnici číslem } a_{n-1}+1, \\ & && \text{ které je dle ind. předpokladu kladné)} \\ 1 &\geq a_{n-1}. \end{aligned}$$

  Teď na pravé straně dosadíme z indukčníhu předpokladu $a_{n-1} \geq 0$ a dostaneme

  $$1 \geq 0,$$

  což je určitě platná nerovnost, kterou jsme odvodili z nerovnosti (1) pouze pomocí ekvivalentních úprav a indukčního předpokladu. Takže i nerovnost (1) platí. □

  Tvrzení 2. *Definujme posloupnost (známou jako Fibonacciho čísla) následovně:* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *a pro* $n \geq 2$ *platí* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. *Nechť* ϕ *je kladný kořen rovnice* $\phi^2 = \phi + 1$ *(tj.* $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, *číslo známé jako zlatý řez). Tvrdíme, že pro každé* $n \geq 1$ *platí* $F_n \geq \phi^{n-1}$.

  Důkaz. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že $n > 1$ a pišme

  $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq \phi^{n-2} + \phi^{n-3} = \phi^{n-3}(\phi + 1) = \phi^{n-1}.$$

  (V druhém kroku jsme použili indukční předpoklad, v posledním kroku jsme použili vztah $\phi + 1 = \phi^2$.) □

- Dokažte indukcí, že pro $k \geq 0$ platí $\sum_{j=0}^{k} F_{2j} = F_{2k+1} - 1$.
- Nechť T je libovolný strom. Pro dva vrcholy $u, v \in V(T)$ označme $d_T(u, v)$ počet hran na cestě mezi u a v. Dokažte, že pro každý strom T na n vrcholech a libovolný jeho vrchol $x \in V(T)$ platí

$$\sum_{y \in V(T)} d_T(x, y) \leq \binom{n}{2}.$$

- Nechť G je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy. Dokažte, že pokud G je maximální rovinný, potom v každém jeho nakreslení jsou všechny stěny trojúhelníky.