Bodované domácí úkoly — 4. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpoveď musíte zdůvodnit.

$\boxed{1}$ 1. (a) Najděte strom, jehož doplněk je také strom.

$\boxed{3}$ (b) Najděte všechny (navzájem neizomorfní) takové stromy a dokažte, že jste žádný nevynechali.

$\boxed{1+2}$ 2. (a) Najděte dva neizomorfní stromy se stejným skóre (1 bod). Dokažte, že lze najít 100 navzájem neizomorfních stromů, které mají všechny stejné skóre (další 2 body).

$\boxed{2}$ (b) Nechť T je strom, nechť G je libovolný graf, který má stejné skóre jako T. Dokažte, že pokud G není strom, pak G je nutně nesouvislý.

$\boxed{3}$ (c) Nechť $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ je posloupnost $n \geq 2$ přirozených čísel, jejichž součet je $2n - 2$. Dokažte, že tato posloupnost je skóre nějakého stromu.

3. Nechť H_n označuje hyperkrychli dimenze n (byla definována na cvičení 2. prosince).

$\boxed{3}$ (a) Pro která n je graf H_n vrcholově 2-souvislý?

$\boxed{4}$ (b) Dokažte, pro $n \geq 2$, že graf H_n obsahuje kružnici, která prochází všemi jeho vrcholy.

$\boxed{2+2}$ (c) Nechť $p \leq q$ jsou dvě přirozená čísla. Dokažte, že H_q obsahuje indukovaný podgraf izomorfní s H_p (2 body). Dokažte, že H_q obsahuje aspoň $\binom{q}{p}2^{q-p}$ indukovaných podgrafů izomorfních H_p (další 2 body).

$\boxed{3}$ 4. Nechť $G = (V, E)$ je vrcholově 2-souvislý graf, jehož každý vrchol má stupeň aspoň 3. Dokažte, že existuje hrana $e \in E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus \{e\})$ je také 2-souvislý.

5. Rozhodněte, jestli jsou následující tvrzení pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad.

$\boxed{3}$ (a) Je-li $G = (V, E)$ vrcholově 2-souvislý graf, pak pro každou uspořádanou trojici jeho vrcholů u, v, w existuje v G cesta z u do v procházející skrz vrchol w.

$\boxed{3}$ (b) Nechť $G = (V, E)$ je graf, nechť P je libovolná cesta v G spojující dva vrcholy $u, v \in V$. Jestliže je G vrcholově 2-souvislý, pak nutně musí obsahovat cestu P', která také spojuje u a v a která nemá s P žádný jiný společný vrchol.

6. Graf se nazývá k-regulární, pokud každý jeho vrchol má stupeň k.

$\boxed{2}$ (a) Ukažte, že pokud k a n jsou lichá, pak žádný graf na n vrcholech není k-regulární.

$\boxed{4}$ (b) Ukažte, že pokud $0 \leq k < n$ a aspoň jedno z čísel k, n je sudé, pak existuje k-regulární graf na n vrcholech.