Přednáška z analytické kombinatoriky, 1. 4.

Tento soubor obsahuje shrnutí látky, kterou jsem přednášel 1. dubna, v době, kdy většina pravidelných posluchačů byla na jarní škole.

Na začátku přednášky jsem zmínil následující technické lemma, jehož hlavním důsledkem je, že každá funkce analytická v nule je automaticky analytická i v každém bodě dostatečně blízko nuly.

Lemma 1. *Nechť* $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $\rho > 0$. *Definujme funkci* $f\colon B_{<\rho}(0) \to \mathbb{C}$ *jakožto limitu*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Potom platí, že f *je analytická v každém bodě* $B_{<\rho}(0)$. *Dokonce pro libovolné* $s \in B_{<\rho}(0)$ *platí, že existuje konvergentní mocninná řada* $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *s poloměrem konvergence* $\sigma \geq \rho - |s| > 0$ *taková, že pro libovolné* $z \in B_{<\rho}(0) \cap B_{<\sigma}(s)$ *platí* $f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n (z-s)^n$.

Myšlenka důkazu: Zvolí se $s \in B_{<\rho}(0)$ a $z \in B_{<\rho-|s|}(s) \subseteq B_{<\rho}(0)$. Ukáže se, že absolutně konvergentní řada $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ se dá přeuspořádat:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n (z-s+s)^n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-s)^k s^{n-k} = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{n\geq k} a_n \binom{n}{k} s^{n-k} \right) (z-s)^k.$$

S využitím vlastností absolutně konvergentních řad se pak zdůvodní, že výše uvedené rovnosti opravdu platí, tj. i po přeuspořádání členů řada stále konverguje ke stejné limitě. $\square$

Abych mohl mluvit o 'globálních' vlastnostech analytických funkcí, zavedl jsem následující definice:

Definice.

- Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je *otevřená*, pokud pro každý bod $x \in \Omega$ existuje okolí $B_{<\varepsilon}(x)$ které je podmnožinou Ω.
- Množina M je *nesouvislá*, pokud existují otevřené disjunktní množiny X a Y takové, že $M \subseteq X \cup Y$, $M \cap X \neq \emptyset$ a $M \cap Y \neq \emptyset$. Speciálně pokud M je otevřená množina, tak platí, že M je nesouvislá právě když M je disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených množin.
- Pojmem *oblast* budeme označovat neprázdnou otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$.
- Bod $x \in M$ je *izolovaný bod množiny* M pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $M \cap B_{<\varepsilon}(x) = \{x\}$.
- Množina M je *diskrétní* pokud je každý její bod izolovaný.
- Pokud $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce definovaná na nějaké množině $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ a pokud f je analytická v každém bodě množiny Ω, tak budeme prostě říkat, že f je *analytická na* Ω.

Lemma 2. *Nechť* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *je libovolná oblast a* f *libovolná funkce analytická na* Ω. *Označme* $M = \{z \in \Omega\colon f(z) = 0\}$ *množinu nulových bodů funkce* f. *Potom platí, že buď* $M = \Omega$ *nebo* M *je diskrétní.*

Důkaz. Z předchozí přednášky známe lemma, které říká, že pokud $f(z) = 0$ a f je analytická v z, tak buď existuje okolí z, na němž je f identicky rovná nule, nebo existuje okolí z, v němž f nemá žádný další nulový bod. Dále platí, že když $f(z) \neq 0$ a f je analytická v z, tak existuje okolí z, ve kterém f nemá žádný nulový bod (protože každá analytická funkce je spojitá).

Předpokládejme, že f je analytická na Ω, a definujme následující dvě množiny:

$$X = \{z \in \Omega\colon f \text{ je identicky rovná nule na nějakém okolí } z\}$$

a

$$Y = \{z \in \Omega\colon f \text{ je různá od nuly ve všech bodech nějakého prstencového okolí } z\}.$$

Z předchozí úvahy plyne, že každý bod $z \in \Omega$ patří buď do X nebo do Y, tj. $\Omega = X \cup Y$. Zároveň je snadné nahlédnout, že X i Y jsou disjunktní otevřené množiny. Protože Ω je oblast, tj. je souvislá, musí nutně být X nebo Y prázdná množina. Pokud $X = \emptyset$, tak je očividně množina M diskrétní. Pokud $Y = \emptyset$, je f nulová v každém bodě, tj. $M = \Omega$. $\square$

Důsledek 3. *Nechť g a h jsou dvě funkce analytické na oblasti Ω, a $M = \{z \in \Omega : g(z) = h(z)\}$. Potom buď $M = \Omega$ nebo M je diskrétní.*

Důkaz. Stačí použít předchozí lemma pro funkci $f(z) = g(z) - h(z)$. □

Důsledek 4. *Pokud Ω je libovolná oblast, M je libovolná podmnožina Ω, která není diskrétní, a $f_0 : M \to \mathbb{C}$ libovolná funkce, tak existuje nejvýš jedna funkce f analytická na Ω taková, že pro každé $z \in M$ platí $f(z) = f_0(z)$. (Taková funkce f se nazve* analytické prodloužení f_0 na oblast Ω.*) Speciální případ: pro každou funkci $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existuje nejvýš jedno analytické prodloužení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

Důkaz. Tohle je okamžitý důsledek předchozího důsledku. □

Následující důsledek mluví o situaci, kdy prodloužíme nějakou funkci na dvě různé oblasti.

Důsledek 5. *Nechť Ω a Ω' jsou dvě oblasti, nechť M je nediskrétní podmnožina $\Omega \cap \Omega'$, nechť f_0 je funkce na M. Pokud má funkce f_0 analytické prodloužení $g : \Omega \to \mathbb{C}$ a také analytické prodloužení $h : \Omega' \to \mathbb{C}$, a pokud navíc platí, že $\Omega \cap \Omega'$ je souvislá množina (a tudíž oblast), tak potom pro $z \in \Omega \cap \Omega'$ platí $g(z) = h(z)$. Definujeme-li funkci f na $\Omega \cup \Omega'$ pomocí vztahů $f(z) = g(z)$ pro $z \in \Omega$ a $f(z) = h(z)$ pro $z \in \Omega'$, tak potom f je analytické prodloužení f_0 na oblast $\Omega \cup \Omega'$*

Důkaz. To, že $g(z) = h(z)$ v oblasti $\Omega \cap \Omega'$ plyne z toho, že funkce f_0 má nejvýš jedno analytické prodloužení na oblast $\Omega \cap \Omega'$. Zbytek tvrzení je zřejmý. □

Zdůrazňuji, že v předchozím tvrzení je nezbytný předpoklad, že $\Omega \cap \Omega'$ je souvislá množina. (Viz níže uvedený příklad 4.)

Příklady analytických funkcí:

Příklad 1. Uvažujme reálnou funkci $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vztahem $f_0(x) = e^x$. Je známo z reálné analýzy, že pro každé reálné číslo x platí

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Mocninná řada na pravé straně má tedy nekonečný poloměr konvergence, a můžeme ji použít k analytickému prodloužení funkce f_0: stačí pro každé komplexní číslo z definovat

$$e^z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Obdobným způsobem se dá definovat analytické prodloužení dalších známých reálných funkcí, které mají konvergentní Taylorovu řadu, například $\cos(z)$ nebo $\sin(z)$. (Poznámka: místo e^z budu také někdy psát $\exp(z)$).

Příklad 2. Jednoznačnost analytického prodloužení se dá často použít k tomu, abychom snadno nahlédli, že některé vlastnosti reálných funkcí se přenášejí i na jejich analytická prodloužení. Chceme-li například ukázat, že pro každé komplexní číslo z platí rovnost $\exp(3z) = (\exp(z))^3$, stačí si nejprve všimnout, že levá i pravá strana rovnosti jsou analytické funkce na $\mathbb{C}$. Navíc levá i pravá strana rovnosti jsou analytická prodloužení té samé reálné funkce f_0 (protože pro reálná čísla víme, že rovnost platí). Protože analytické prodloužení je jednoznačné, musí rovnost platit pro každé komplexní z. Obdobně se dokáží další vztahy, třeba $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, $(\sin(z))' = \cos(z)$ atd.

Příklad 3. Na jedné z předchozích přednášek jsem říkal, že pokud nějaká funkce g je analytická a nenulová v bodě z, tak $\frac{1}{g(z)}$ je také analytická v z.

Například funkce $g(z) = 1 - z$ je analytická na $\mathbb{C}$, takže funkce $f(z) = \frac{1}{1-z}$, definovaná na oblasti $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, je analytická na Ω.

Všimněte si, že v okolí bodu 0 je možné definovat funkci f_0 jako limitu mocninné řady $f_0(z) = 1 + z + z^2 + z^3 \cdots$. Tato mocninná řada má poloměr konvergence 1. Protože na okolí bodu 0 platí $f_0(z) = \frac{1}{1-z}$, vidíme, že funkce f je analytické prodloužení funkce f_0. Tento příklad ukazuje, že funkci definovanou v okolí nějakého bodu jako limitu mocninné řady lze (někdy) analyticky prodloužit i do bodů, kde ta řada nekonverguje.

Protože má funkce f v okolí bodu 1 neomezeně velké hodnoty, nelze ji v tomto bodě spojitě (a tudíž ani analyticky) dodefinovat. Takže f nemá analytické prodloužení na celou oblast $\mathbb{C}$. Ani žádné jiné analytické prodloužení funkce f_0 nemůže být analytické v bodě 1, protože každé analytické prodloužení f_0 se musí shodovat s f na oblasti Ω.

Příklad 4. Pro kladná reálná čísla definujme funkci $f_0(x) = \sqrt{x}$. Zkusme tuto funkci analyticky prodloužit na co největší podoblast $\mathbb{C}$. Každé takové analytické prodloužení f musí na svém definičním oboru splňovat rovnost $f(z)^2 = z$, protože $f(z)^2$ je analytické prodloužení $f_0(z)^2$, a $f_0(z)^2$ je identická funkce na $\mathbb{R}^+$, jejímž analytickým prodloužením musí být zase identická funkce.

Naším cílem je tedy najít funkci f, která je inverzní funkcí k funkci $g(z) = z^2$. Na předchozí přednášce jsem zmiňoval, že pokud je g analytická v nějakém bodě z, a pokud má v tomto bodě nenulovou první derivaci, pak na nějakém okolí bodu z je funkce g (lokální) bijekce, a její inverzní funkce je analytická v bodě $g(z)$. Použijme toto tvrzení na funkci $g(z) = z^2$. Ta je analytická v $\mathbb{C}$, a má nenulovou derivaci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Teď ukážeme, že ačkoliv v okolí každého nenulového bodu lze definovat (lokální) analytickou inverzní funkci k funkci g, přesto neexistuje žádná funkce analytická na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, která by byla inverzní ke g (a tudíž neexistuje způsob, jak funkci f_0 analyticky prodloužit na oblast $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Uvažme nejdřív oblast $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{xi : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$. Tj. Ω_1 obsahuje všechna komplexní čísla, kromě ryze imaginárních čísel s nekladnou imaginární složkou. Každé číslo $z \in \Omega_1$ lze reprezentovat v polárních souřadnicích jako $z = |z| \exp(i\alpha)$, pro nějaké $-\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$. Definujme funkci $f_1(z) = \sqrt{|z|} \exp(\alpha/2)$. Funkce f_1 je analytická na Ω_1, protože v okolí každého bodu Ω_1 se shoduje s lokální inverzní funkcí k analytické funkci $g(z) = z^2$. Funkce f_1 je tedy analytické prodloužení funkce f_0 na oblast Ω_1.

Nyní uvažme oblast $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{xi : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$. Číslo $z \in \Omega_2$ lze reprezentovat jako $z = |z| \exp(i\alpha)$, pro $-3\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Definujme $f_2(z) = \sqrt{|z|} \exp(\alpha/2)$. Potom f_2 je analytické prodloužení f_0 na oblast Ω_2.

Přestože f_1 a f_2 jsou analytická prodloužení funkce f_0, tato dvě prodloužení se na množině $\Omega_1 \cap \Omega_2$ neshodují: například $f_1(-1) = i$ a $f_2(-1) = -i$. Z toho mimo jiné plyne, že funkci $f_0(x) = \sqrt{x}$ nelze analyticky prodloužit na oblast $\Omega_1 \cup \Omega_2$, protože každé takové prodloužení by se muselo shodovat s f_1 na Ω_1 a s f_2 na Ω_2.

Ve zbytku přednášky jsem se zabýval funkcemi, které jsou analytické na prstencovém okolí nějakého bodu $s \in \mathbb{C}$.

Definice. Funkce f má *izolovanou singularitu v bodě* s, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že f je analytická na prstencovém okolí $B^*_{<\varepsilon}(s)$.

Předpokládejme, že f má izolovanou singularitu v bodě s. Rozlišíme tři možné situace:

- Pokud existuje vlastní limita $\lim_{z \to s} f(z) \in \mathbb{C}$, řekneme, že f má *odstranitelnou* (nebo též *kosmetickou*) singularitu v s.
- Pokud existuje nevlastní limita $\lim_{z \to s} f(z) = \infty$, řekneme, že f má *pól* v s.
- Pokud limita $\lim_{z \to s} f(z)$ neexistuje, řekneme, že f má v s *podstatnou singularitu*.

Bez důkazů konstatujme, že izolované singularity mají následující vlastnosti:

Pokud má f odstranitelnou singularitu v bodě s, můžeme ji v tomto bodě spojitě dodefinovat (nebo předefinovat) vztahem $f(s) = \lim_{z \to s} f(z)$. Takto dodefinovaná funkce je pak nejen spojitá, ale dokonce i analytická v s. Příklad odstranitelné singularity (v bodě $s = 0$): $f(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}$.

Pokud má f pól v bodě s, pak existuje přirozené číslo k takové, že funkce $g(z) = f(z)(z-s)^k$ má v bodě s pouze odstranitelnou singularitu. Nejmenší přirozené k, pro které toto platí, se nazývá *řád pólu*. Pokud má funkce f v bodě s pól k-tého řádu, pak existuje posloupnost koeficientů $a_{-k}, a_{-(k-1)}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ taková, že $a_{-k} \neq 0$ a pro každé z na dostatečně malém prstencovém okolí bodu s platí

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-s)^n = \frac{a_{-k}}{(z-s)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z-s)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-s} + a_0 + a_1(z-s) + \cdots .$$

Řada na pravé straně této rovnosti se nazývá *Laurentova řada* funkce f se středem v s. Laurentovy řady lze chápat jako zobecnění mocninných řad.

Pokud má f v bodě s podstatnou singularitu, pak platí, že v každém prstencovém okolí bodu s nabývá funkce f všech komplexních hodnot kromě nejvýše jedné. I pro funkce s podstatnou singularitou platí, že na okolí s se dají v jistém smyslu vyjádřit jako limity Laurentovy řady, ale ta Laurentova řada má tentokrát nekonečně mnoho záporných exponentů. Takovéto 'oboustranně nekonečné' řady pro nás nebudou zajímavé, takže si je ani nebudeme formálně definovat.

Příkladem funkce s podstatnou singularitou je například $f(z) = \exp(1/z)$, která na každém okolí nuly nabývá všech nenulových hodnot.

Všimněte si, že když je funkce f v okolí své izolované singularity omezená, tak se nutně musí jednat o odstranitelnou singularitu.