Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v útery 12. prosince.

Příklad 1. Nechť G je 3-regulární, vrcholově 2-souvislý rovinný graf. Ukažte, že G má hranovou barevnost 3. Smíte bez důkazu použít větu o čtyřech barvách, tj. smíte předpokládat, že každý rovinný graf má vrcholovou (nebo ekvivalentně stěnovou) barevnost nejvýše 4. [2 body]

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf s vrcholy $v_1, \dots, v_n$. Graf G se nazývá *intervalový graf*, pokud je možné každému vrcholu v_i přiřadit uzavřený omezený interval $I_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ tak, aby pro každé dva různé vrcholy v_i a v_j platilo, že $\{v_i, v_j\}$ je hrana G právě tehdy, když I_i a I_j mají neprázdný průnik. Dokažte, že každý intervalový graf je perfektní. [2 body]

Příklad 3. Nechť G je chordální graf. Popište polynomiální algoritmus, který v grafu G najde největší nezávislou množinu. Smíte předpokládat, že součástí vstupu pro váš algoritmus je i PES grafu G. Nezapomeňte zdůvodnit, že váš algoritmus je korektní. [3 body]

Příklad 4. Nechť $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ je permutace čísel $1, 2, \dots, n$, tj. posloupnost, v níž se každé z čísel $1, 2, \dots, n$ vyskytuje právě jednou. Nechť K je délka nejdelší klesající podposloupnosti v p. Dokažte, že p lze pokrýt pomocí K rostoucích podposloupností (jinými slovy, v p lze najít K rostoucích podposloupností takových, že každý prvek p patří do některé z nich). [2 body]

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je multigraf. Označme jeho vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. *Matice incidence nad* $\mathbb{Z}_2$ multigrafu G je matice M s n řádky a m sloupci definovaná následovně:

- Pokud je hrana e_i smyčka, tak i-tý sloupec M obsahuje samé nuly.
- Pokud je e_i hrana spojující dva různé vrcholy v_j a v_k, tak i-tý sloupec M obsahuje jedničky v řádcích j a k a v ostatních řádcích má nuly.

Připomeňme, že hodnost multigrafu G je definována jako $n - k(G)$, kde $k(G)$ je počet komponent souvislosti G. Připomeňme také, že hodnost matice se v lineární algebře definuje jako dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci té matice (nebo ekvivalentně dimenze prostoru generovaného řádky té matice). Dokažte, že hodnost G je rovna hodnosti matice M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. [2 body]

Příklad 6. Určete Tutteův polynom následujících grafů.

- kružnice délky n [1 bod]
- multigraf obsahující vrcholy x a y, mezi nimiž vede n paralelních hran $\{x, y\}$ [1 bod]