Příklady na procvičení před druhým testem z matematických dovedností

Dokažte následující tvrzení.

1. Neexistuje žádné racionální číslo x takové, že $x^3 = 4$.
2. Pro každé přirozené číslo m platí, že m je sudé právě tehdy, když $2^m - 1$ je násobek tří.
3. Pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ platí $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$.
4. Symbolem F_n označme n-té Fibonacciho číslo (připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou definována pomocí vztahů $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že čísla F_{n-1} a F_n jsou navzájem nesoudělná (tj. nemají žádného společného celočíselného dělitele většího než 1).
5. Symbolem F_n označme opět n-té Fibonacciho číslo. Potom pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ existuje přesně F_{n+2} způsobů, jak vytvořit posloupnost nul a jedniček délky n tak, aby žádné dvě jedničky nebyly na sousedních pozicích. (Příklad: pro $n = 3$ máme posloupnosti 000, 001, 010, 100 a 101.)
6. Nechť S je ternární strom, tj. zakořeněný strom, jehož každý vnitřní vrchol má právě tři potomky. Předpokládejme, že každý vnitřní vrchol stromu S má mezi svými třemi potomky aspoň jeden list. Označme d hloubku stromu S, tedy počet hran na nejdelší cestě z kořene do některého listu. Potom S má nejvýše $2^{d+1} - 1$ listů.
7. V libovolném grafu $G = (V, E)$ lze obarvit vrcholy dvěma barvami tak, že alespoň $|E|/2$ hran bude obsahovat vrcholy obou barev.