Doplňující příklady z matematických dovedností

Řešení příkladů mi můžete poslat mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přinést osobně na papíře. Úkoly z této sady můžete odevzdávat do konce zimního zkouškového období, tedy do 18. února 2018.

Za každý z následujících příkladů můžete získat 1 bod.

Příklad 1. Dokažte, že neexistují dvě celá čísla x a y taková, že $x^2 - y^2 = 2$.

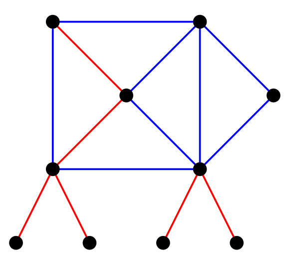
Příklad 2. Dokažte, že rovnice $x^7 - 13x + 5 = 0$ nemá žádné racionální řešení.

Příklad 3. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Příklad 4. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je libovolný graf. Dokažte, že hrany grafu G lze obarvit dvěma barvami, řekněme červenou a modrou, tak, že každá kružnice grafu G obsahuje aspoň jednu modrou hranu a zároveň každý vrchol G sousedí se sudým počtem (tedy možná i nulovým počtem) modrých hran. Následující obrázek ukazuje příklad takového obarvení.



Příklad 6. Nechť n je přirozené číslo. Mějme rovinný útvar ve tvaru čtverce o rozměrech $2^n \times 2^n$, z něhož byl v jednom z rohů odstraněn čtvereček o rozměrech 1×1. Dokažte, že tento útvar lze vydláždit pomocí dílků ve tvaru L skládajících se ze tří spojených čtverečků o rozměru 1×1. Následující obrázek ukazuje příklad takového dláždění pro $n = 2$.