Doplňující příklady z matematických dovedností

Řešení příkladů mi můžete poslat mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přinést osobně na papíře. Úkoly z této sady můžete odevzdávat do začátku zimního zkouškového období, tedy do 14. ledna 2018.

Příklad 1. Pro každou z následujících implikací napište její obměnu. [0.5 bodu za každou část]

a) Jestli žádný dělitel čísla x není sudý, pak číslo $x+2$ není ani násobek šesti ani násobek osmi.

b) Pokud je x iracionální, tak pro každé přirozené číslo n platí, že $x+n$ je iracionální.

c) Pokud žádný prvek množiny M není lichý, pak součet všech prvků M je sudý.

d) Pokud pro každé $x \in M$ a každé $y \in M$ platí, že $x+y$ je násobek čtyř, tak jsou všechny prvky M sudé.

e) Pokud x je dělitelné 6 a y je dělitelné 7, pak xy je sudé a navíc x^2y je násobek čtyř.

Příklad 2. Pro každý z následujících výroků (nebo predikátů) napište jeho negaci. [0.5 bodu za každou část]

a) V každém městě s více než 10 000 obyvateli jsou aspoň tři školy a aspoň jedna nemocnice.

b) Pokud žádný dělitel čísla x není sudý, má x aspoň dva různé dělitele.

c) $\forall x \in X\colon\ (P(x) \Rightarrow \exists y \in Y\colon Q(y))$.

d) Číslo n má aspoň jednoho dělitele, který není dělitelem žádného čísla menšího než n.

e) Každá množina pěti čísel obsahuje aspoň tři lichá čísla nebo aspoň tři sudá čísla.

Příklad 3. Každé z následujících tvrzení vyjádřete ekvivalentní výrokovou formulí, s využitím kvantifikátorů, logických spojek a symbolu $a|b$, který znamená, že a je dělitel b. [0.5 bodu za každou část]

a) Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.

b) Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.

c) Pokud každé sudé přirozené číslo patří do množiny M, pak žádné sudé přirozené číslo nepatří do množiny N.

d) Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.

e) Pro libovolné přirozené číslo n platí, že pokud n dělí všechny prvky množiny A, pak také dělí aspoň jeden prvek množiny B.

U následujících příkladů vždy zdůvodněte, proč má vaše řešení požadované vlastnosti. Za každý ze zbývajících příkladů můžete získat jeden bod.

Příklad 4. Najděte posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takovou, že

- výrok $\forall i \in \mathbb{N}\colon \exists \varepsilon \in (0, +\infty)\colon a_i > \varepsilon$ bude pravdivý a zároveň
- výrok $\exists \varepsilon \in (0, +\infty)\colon \forall i \in \mathbb{N}\colon a_i > \varepsilon$ bude nepravdivý.

Příklad 5. Najděte množinu $X \subseteq \mathbb{N}$ takovou, že

- výrok ($\forall n \in X\colon n$ je sudé) $\Rightarrow$ ($\forall n \in X\colon n$ je násobek čtyř) bude pravdivý a zároveň
- výrok $\forall n \in X\colon$ (n je sudé $\Rightarrow n$ je násobek čtyř) bude nepravdivý.

Příklad 6. Najděte reálnou funkci f, pro kterou

- výrok $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exists \varepsilon \in (0, +\infty)\colon f(x+1) \geq f(x)+\varepsilon$ bude pravdivý a zároveň
- výrok $\exists \varepsilon \in (0, +\infty)\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon$ bude nepravdivý.

Příklad 7. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{N}$, pro kterou

- výrok $\forall x \in M\colon \exists y \in M\colon x + y \in M$ bude pravdivý a zároveň
- výrok $\forall x \in M\colon \forall y \in M\colon x + y \in M$ bude nepravdivý.

Příklad 8. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, pro níž

- výrok $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon (\forall z \in M\colon z \in [x, y]) \implies y > x + 1$ bude pravdivý a zároveň
- výrok $\forall x \in \mathbb{R}\colon \forall y \in \mathbb{R}\colon \forall z \in M\colon (z \in [x, y] \implies y > x + 1)$ bude nepravdivý.