Třetí série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 15:40)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 12. března.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. V tomto příkladu uvažujeme na vektorovým prostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ standardní skalární součin a jeho indukovanou normu. Nechť V je podprostor $\mathbb{R}^3$ definovaný následovně:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x_1 + x_2}{2} = x_3 \right\}.$$

a) Najděte nějakou ortonormální bázi $\{z_1, z_2\}$ prostoru V. [2 body]

b) Nechť $x \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor. Z přednášky víte, že vektor $x_V = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2$ je označován jako ortogonální projekce vektoru x na prostor V a že tento vektor má ze všech vektorů z V nejmenší vzdálenost od x. Dokažte, že pro každé x platí, že vektor $x - x_V$ je kolmý na všechny vektory z V. [1 bod]

c) Jaká je vzdálenost vektoru $x = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ od prostoru V? Který vektor prostoru V má k vektoru x nejblíž? [1 bod]

d) Dokažte, že vektor $z \in \mathbb{R}^3$ je kolmý na všechny vektory prostoru V právě tehdy, když z je skalární násobek vektoru $(1, 1, -2)$. [2 body] (Nápověda: může se vám hodit fakt, že vektory z_1 a z_2 z bodu a) tvoří spolu s vektorem $(1, 1, -2)$ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, a že tedy každý vektor $z \in \mathbb{R}^3$ je lineární kombinace těchto tří vektorů. Navíc každé dva z těchto tří vektorů jsou na sebe kolmé.)