Čtvrtá série domácích úkolů

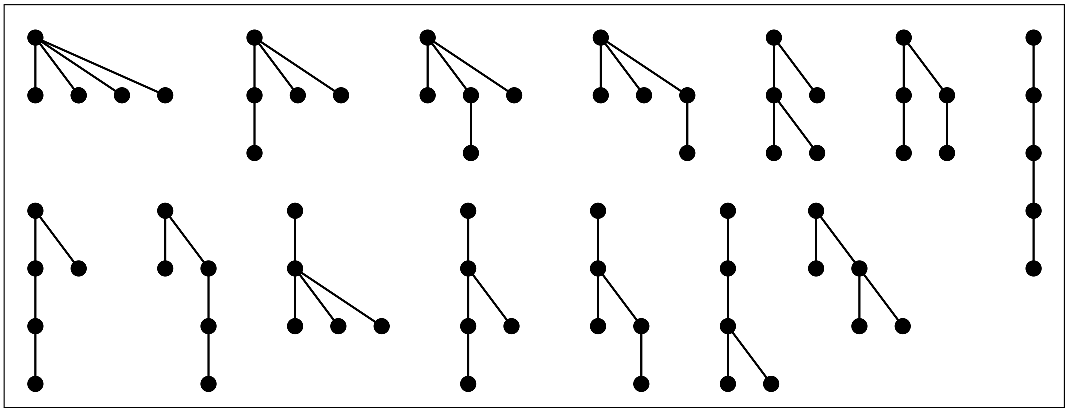
verze pro cvičení v úterý od 15:40

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 4. dubna.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit prezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

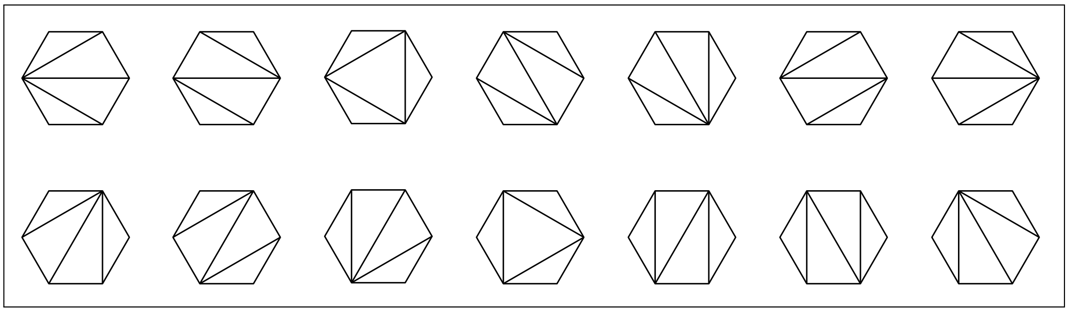
---

1. V následujících otázkách označuje C_n n-té Catalanovo číslo, tj. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte, že existuje přesně C_n zakořeněných stromů s n hranami. Uvažujeme zde stromy, v nichž každý vrchol může mít libovolný počet potomků. Dva zakořeněné stromy pokládáme za různé, i když se liší jen změnou pořadí potomků nějakého vrcholu. Následující obrázek ukazuje 14 zakořeněných stromů se čtyřmi hranami.



$\boxed{2}$ (b) Dokažte, že existuje přesně C_n triangulací pravidelného $(n+2)$-úhelníku, tj. přesně C_n způsobů, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$-úhelník na trojúhelníky pomocí nekřížících se úseček spojujících jeho vrcholy. Následující obrázek ukazuje 14 triangulací šestiúhelníku.



$\boxed{2}$ 2. Najděte hypergraf (B, P), který není projektivní rovina, a přitom splňuje následující trojici axiomů:

$P1$) Každé dvě různé hyperhrany $p, p' \in P$ mají jednoprvkový průnik.

$P2$) Pro každé dva různé vrcholy $b, b' \in B$ existuje právě jedna hyperhrana $p \in P$ taková, že $\{b, b'\} \subseteq p$.

$\overline{P0}$) Existuje čtyřprvková množina $\check{C} \subseteq B$ taková, že pro každé $p \in P$ platí $|p \cap \check{C}| \leq 3$.

Zdá-li se vám to těžké, najděte aspoň libovolný hypergraf splňující $P1$ a $P2$, který není projektivní rovina. Za to dostanete 1 bod.

$\boxed{2}$ 3. Nechť (B, P) je hypergraf, který splňuje axiomy $P1$ a $P2$ z předchozího příkladu. Předpokládejme, že v P existují dvě různé hyperhrany $p, q \in P$, z nichž každá obsahuje aspoň 3 vrcholy. Dokažte, že (B, P) je projektivní rovina.