První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v úterý 10. listopadu.

Počet lichých komponent grafu G značím $\mathrm{odd}(G)$. *Izolovaný vrchol* v nějakém grafu je vrchol stupně 0.

Příklad 1. Kolik perfektních párování má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ odebráním jedné hrany? [1 bod]

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že G má perfektní párování, právě když pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že v grafu $G - S$ je nejvýš $|S|$ izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

Příklad 3. Nechť $G = (V, E)$ je graf s lichým počtem vrcholů. Řekneme, že párování M v grafu G je *skoro perfektní*, pokud M má jen jeden volný vrchol. Dokažte, že G má skoro perfektní párování, právě když pro každou množinu vrcholů $S \subseteq V$ platí, že $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + 1$. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body] (Nápověda: můžete třeba ukázat, že existence skoro perfektního párování v G je ekvivalentní existenci perfektního párování v nějakém jiném vhodně definovaném grafu G'.)

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf se dvěma stejně velkými partitami X a Y. Předpokládejme, že platí následující verze Hallovy podmínky: $\forall X' \subseteq X : |X'| \leq |N(X')|$, kde $N(X')$ je množina vrcholů, které mají aspoň jednoho souseda v X'. Ze cvičení už víme, že v takovém případě platí i symetrická Hallova podmínka pro druhou partitu: $\forall Y' \subseteq Y : |Y'| \leq |N(Y')|$. Dokažte bez použití Hallovy či Tutteovy věty, že v G platí i Tutteova podmínka, tj. $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$. [3 body]

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je 3-regulární 2-souvislý graf a nechť $e \in E$ je libovolná jeho hrana. Dokažte, že graf G má perfektní párování, které neobsahuje hranu e [3 body].