Čtvrtá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do neděle 11. ledna 2015.

Při řešení můžete bez důkazu používat jakékoliv věty dokázané na přednášce nebo na cvičení a také věty, které znáte z jiných přednášek.

**Příklad 1.** Nechť $G$ je graf, který má 14 vrcholů, mezi nimiž je 10 vrcholů stupně 7 a 4 vrcholy stupně 5. Dokažte, že $G$ obsahuje hamiltonovskou kružnici [2 body].

**Příklad 2.** Připomeňme, že pojmem *kompozice velikosti* $n$ označujeme libovolnou posloupnost přirozených čísel, jejichž součet je $n$. Spočítejte, kolik jedniček v průměru obsahují kompozice velikosti $n$ [3 body]. (Zdá-li se vám to moc pracné, najděte aspoň vzorec pro mocninnou řadu $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, kde $a_n$ je celkový počet jedniček ve všech kompozicích velikosti $n$. Za to dostanete dva body.)

**Příklad 3.** Nechť $M$ je nějaká množina. Pojmem *množinový rozklad* množiny $M$ označujeme libovolnou množinu $\mathcal{R} = \{M_1, \ldots, M_k\}$, kde $M_i$ jsou neprázdné disjunktní množiny, jejichž sjednocení je množina $M$. Nechť $B_n$ označuje počet množinových rozkladů množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. (Příklad: $B_3 = 5$, protože množina $\{1, 2, 3\}$ má následující rozklady: $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$,$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, a $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.) S využitím mocninné řady $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro mocninnou řadu

$$\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n \quad \text{[3 body].}$$

(Poznámka: čísla $B_n$ jsou známá pod názvem Bellova čísla. Není pro ně znám žádný jednoduchý vzoreček.)

**Příklad 4.** Mějme "šachovnici" se třemi řádky a třemi sloupci. Spočítejte, kolik existuje neizomorfních způsobů, jak obarvit devět políček této šachovnice pomocí $n$ barev. Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace nebo vodorovného, svislého či diagonálního překlopení. Neklademe žádná omezení na možné barvy políček, tj. například sousední políčka mohou být obarvena stejnou barvou [2 body].

**Příklad 5.** Označme $a_n$ počet navzájem neizomorfních multigrafů (s případnými smyčkami) na množině vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$ majících $n$ hran. Najděte vzorec pro vytvořující funkci $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ [3 body].