

Čtvrtá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do neděle 11. ledna 2015.

Při řešení můžete bez důkazu používat jakékoliv věty dokázané na přednášce nebo na cvičení a také věty, které znáte z jiných přednášek.

Příklad 1. Necht G je graf, který má 14 vrcholů, mezi nimiž je 10 vrcholů stupně 7 a 4 vrcholy stupně 5. Dokažte, že G obsahuje hamiltonovskou kružnici [2 body].

Příklad 2. Pojmem *kladná kompozice velikosti n* označme libovolnou posloupnost přirozených čísel, jejichž součet je n . Spočítejte, kolik jedniček v průměru obsahují kladné kompozice velikosti n [3 body]. (Zdá-li se vám to moc pracné, najděte aspoň vzorec pro mocninnou řadu $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, kde a_n je celkový počet jedniček ve všech kladných kompozicích velikosti n . Za to dostanete dva body.)

Příklad 3. Necht M je nějaká množina. Pojmem *množinový rozklad* množiny M označujeme libovolnou množinu $\mathcal{R} = \{M_1, \dots, M_k\}$, kde M_i jsou neprázdné disjunktní množiny, jejichž sjednocení je množina M . Necht B_n označuje počet množinových rozkladů množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. (Příklad: $B_3 = 5$, protože množina $\{1, 2, 3\}$ má následující rozklady: $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, a $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.) S využitím mocninné řady $\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro mocninnou řadu

$$\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n \quad [3 \text{ body}].$$

(Poznámka: čísla B_n jsou známá pod názvem Bellova čísla. Není pro ně znám žádný jednoduchý vzoreček.)

Příklad 4. Kolika neizomorfními způsoby lze obarvit stěny krychle pomocí n barev? Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud jedno lze převést na druhé pomocí nějaké prostorové rotace [2 body].

Příklad 5. Označme a_n počet navzájem neizomorfních multigrafů (s případnými smyčkami) na množině vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$ majících n hran. Najděte vzorec pro vytvářející funkci $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ [3 body].