Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do neděle 14. prosince.

Při řešení můžete bez důkazu používat jakékoliv věty z přednášky, tvrzení dokázaná na cvičení a také věty, které znáte z jiných přednášek.

Některé otázky jsou označené jako bonusové. Tyto otázky jsou ryze dobrovolné, nezískáte za ně žádné body a jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu. Pokud ovšem zvládnete vyřešit hodně bonusových příkladů, budu k vám pak o něco shovívavější u zkoušky.

Příklad 1. Nechť G je chordální graf, a nechť posloupnost $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je jeho perfektní eliminační schéma. Pro každou z následujících úloh popište polynomiální algoritmus, který ji vyřeší. Smíte předpokládat, že součástí vstupu pro váš algoritmus je i PES grafu G.

- Určete $\omega(G)$ a najděte v G kliku velikosti $\omega(G)$ [1 bod].
- Určete $\chi(G)$ a najděte obarvení G pomocí $\chi(G)$ barev [1 bod].
- Určete $\alpha(G)$ a najděte v G nezávislou množinu velikosti $\alpha(G)$ [2 body].

Příklad 2. Nechť $G = (V_G, E_G)$ a $H = (V_H, E_H)$ jsou dva perfektní grafy s disjunktními množinami vrcholů, a nechť v je nějaký vrchol G. Vytvoříme nový graf $F = (V_F, E_F)$ tak, že vrchol v 'nafoukneme' do kopie grafu H, tj. vrchol v nahradíme grafem H a každý soused vrcholu v dostane v F za sousedy všechny vrcholy grafu H. Formálně:

$$V_F = (V_G \cup V_H) \setminus \{v\}$$
$$E_F = \{e \in E_G \colon v \notin e\} \cup E_H \cup \left\{ \{x, y\} \in \binom{V_F}{2} \colon \{x, v\} \in E_G, y \in V_H \right\}.$$

Dokažte, že F je perfektní [3 body. Zdá-li se vám to těžké, vyřešte aspoň speciální případ, kdy H je úplný graf; za to získáte 2 body].

Příklad 3. Nechť $G = (V, E, f)$ je multigraf. Označme jeho vrcholy $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. *Matice incidence nad* $\mathbb{Z}_2$ multigrafu G je matice M s n řádky a m sloupci definovaná následovně:

- Pokud je hrana e_i smyčka, tak i-tý sloupec M obsahuje samé nuly.
- Pokud je e_i hrana spojující dva různé vrcholy v_j a v_k, tak i-tý sloupec M obsahuje jedničky v řádcích j a k a v ostatních řádcích má nuly.

Připomeňme, že hodnost množiny hran E je definována jako $n - k(E)$, kde $k(E)$ je počet komponent souvislosti multigrafu G. Připomeňme také, že hodnost matice se v lineární algebře definuje jako dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci té matice (nebo ekvivalentně dimenze prostoru generovaného řádky té matice). Dokažte, že hodnost množiny hran E je rovna hodnosti matice M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ [2 body].

Bonusová úloha: řekneme, že množina hran $F \subseteq E$ je *sudá*, pokud podmultigraf $H = (V, F, f{\restriction}_F) \subseteq G$ má všechny stupně sudé (přičemž přidáním smyčky k vrcholu se jeho stupeň zvýší o dva). Dokažte, že E má přesně $2^{n(E)}$ sudých podmnožin, kde $n(E)$ je nulita E. Chcete-li, můžete bez důkazu použít rovnost $\dim(C) + \dim(C^\perp) = m$, kde C je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^m$ a $C^\perp$ je ortogonální doplněk C.

Příklad 4. Nechť $T_G(x, y)$ je Tutteův polynom nějakého neznámého multigrafu G s alespoň jedním vrcholem. Popište, jak lze z polynomu $T_G(x, y)$ získat následující informace:

- počet hran G [1 bod].
- vrcholová barevnost G [1 bod].
- počet smyček v G [2 body].