První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději do pátku 31. října.

Počet lichých komponent grafu G značím $\mathrm{odd}(G)$.

Příklad 1. Nechť $G = (V, E)$ je graf, nechť M je nějaké párování v G a nechť K je nějaká kružnice liché délky v G, která obsahuje právě $\lfloor |K|/2 \rfloor$ hran z M (z čehož mimo jiné plyne, že nejvýš jeden vrchol z K je spárovaný s vrcholem mimo K). Nechť $G.K$ označuje graf vzniklý zkontrahováním K do jednoho vrcholu a nechť $M.K$ je příslušné párování.

- Jestliže M je největší párování v G, znamená to, že i $M.K$ je nutně největší párování v $G.K$? [1 bod]
- Jestliže $M.K$ je největší párování v $G.K$, znamená to, že M je největší párování v G? [1 bod]

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf a $S \subseteq V$ podmnožina jeho vrcholů. Dokažte, že $|V| + |S| + \mathrm{odd}(G - S)$ je sudé číslo. [1 bod]

Příklad 3. Kolik perfektních párování má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ odebráním jedné hrany? [1 bod]

Příklad 4. Nechť $T = (V, E)$ je strom. Dokažte, že T má perfektní párování právě tehdy, když má sudý počet vrcholů a navíc platí, že pro každý vrchol $v \in V$ má graf $T - v$ nejvýš jednu lichou komponentu. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body].

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je graf a $k \geq 0$ celé číslo. Dokažte, že G má párování s nejvýše k volnými vrcholy, právě když platí následující "Tutteova podmínka s deficitem": $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + k$. Pokud vám to pomůže, smíte předpokládat, že $|V| + k$ je sudé. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body].

Příklad 6. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf se dvěma stejně velkými partitami X a Y. Předpokládejme, že platí následující verze Hallovy podmínky: $\forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$, kde $N(A)$ je množina vrcholů, které mají aspoň jednoho souseda v A. Ze cvičení už víme, že v takovém případě platí i symetrická Hallova podmínka pro druhou partitu: $\forall B \subseteq Y : |B| \leq |N(B)|$. Dokažte bez použití Hallovy či Tutteovy věty, že v G platí i Tutteova podmínka, tj. $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$. [3 body]