Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději během pátku 10. ledna. Po uplynutí této lhůty si můžete individuálně k příkladům vyžádat nápovědu. Příklady můžete odevzdávat i po nápovědě, ale dostanete za ně jen polovinu standardního počtu bodů.

Ve svých řešeních smíte bez důkazu používat všechna tvrzení, která byla dokázána na přednášce nebo na cvičení, jakož i vše, co jste se naučili v předchozích semestrech studia. Nezapomeňte ale zmínit, že nějaký takový výsledek používáte.

Některé otázky jsou označené jako bonusové. Tyto otázky jsou ryze dobrovolné, nezískáte za ně žádné body a jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu. Pokud ovšem zvládnete vyřešit hodně bonusových příkladů, budu k vám pak o něco shovívavější u zkoušky.

Příklad 1. Nechť G je multigraf. Označme jeho vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hrany $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. *Matice incidence nad* $\mathbb{Z}_2$ multigrafu G je matice M s n řádky a m sloupci definovaná následovně:

- Pokud je hrana e_i smyčka, tak i-tý sloupec M obsahuje samé nuly.
- Pokud je e_i hrana spojující dva různé vrcholy v_j a v_k, tak i-tý sloupec M obsahuje jedničky v řádcích j a k a v ostatních řádcích má nuly.

Připomeňme, že hodnost množiny hran E je definována jako $n - k(E)$, kde $k(E)$ je počet komponent souvislosti multigrafu G. Připomeňme také, že hodnost matice se v lineární algebře definuje jako dimenze vektorového prostoru generovaného sloupci té matice (nebo ekvivalentně dimenze prostoru generovaného řádky té matice). Dokažte, že hodnost množiny hran E je rovna hodnosti matice M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ [2 body].

Bonusová úloha: řekneme, že množina hran $F \subseteq E$ je *sudá*, pokud multigraf $H = (V, F)$ má všechny stupně sudé (přičemž přidáním smyčky k vrcholu se jeho stupeň zvýší o dva). Dokažte, že E má přesně $2^{n(E)}$ sudých podmnožin, kde $n(E)$ je nulita E. Chcete-li, můžete bez důkazu použít rovnost $\dim(C) + \dim(C^\perp) = m$, kde C je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^m$ a $C^\perp$ je ortogonální doplněk C.

Příklad 2. Nechť $T_G(x, y)$ je Tutteův polynom multigrafu G. Dokažte, že $T_G(0, 2)$ je rovno počtu totálně cyklických orientací multigrafu G. Orientace G je *totálně cyklická*, pokud každá orientovaná hrana patří do alespoň jedné orientované kružnice (včetně kružnic délky 1 nebo 2) [3 body]. Bonusová úloha: pro souvislý rovinný multigraf G a jeho duál G^* dokažte bez použití Tutteova polynomu, že počet acyklických orientací G je roven počtu totálně cyklických orientací G^*.

Příklad 3. Připomeňme, že *kompozice velikosti* n je posloupnost přirozených čísel, jejichž součet je n. Spočítejte, kolik jedniček v průměru obsahuje kompozice velikosti n [2 body].

Příklad 4. Nechť k je nějaké pevně zvolené přirozené číslo. Nechť p_n označuje počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, které nemají žádný cyklus délky k. Najděte vzorec pro exponenciální vytvořující funkci $\sum_{n \geq 0} p_n \frac{x^n}{n!}$ [2 body]. Bonusová úloha: uvažme všechny permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Jaký mají průměrný počet cyklů délky k?

Příklad 5. Mějme "šachovnici" se třemi řádky a třemi sloupci. Spočítejte, kolik existuje neizomorfních způsobů, jak obarvit devět políček této šachovnice pomocí n barev. Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace nebo vodorovného, svislého či diagonálního překlopení. Neklademe žádná omezení na možné barvy políček, tj. například sousední políčka mohou být obarvena stejnou barvou [2 body].

Příklad 6. Označme a_n počet navzájem neizomorfních multigrafů (s případnými smyčkami) na množině vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$ majících n hran. Najděte vzorec pro vytvořující funkci $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ [2 body].