Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

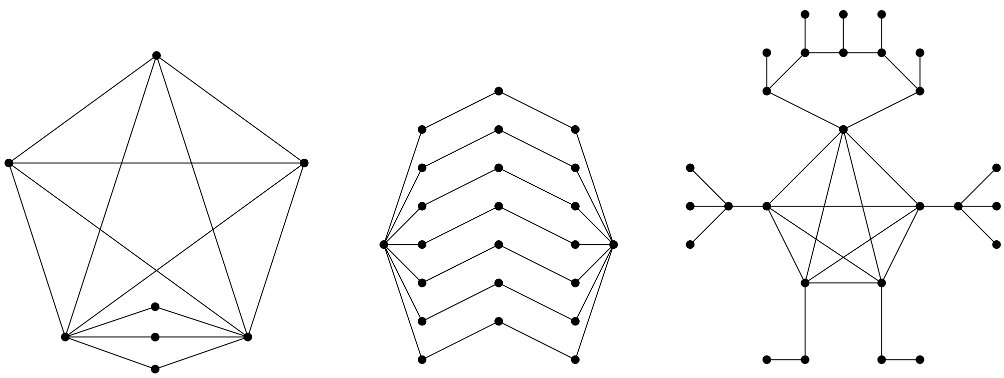
jedenáctá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 7. 5. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2+1}$ 1. Dokažte, že úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má právě $n^{m-1}m^{n-1}$ různých koster. Zdá-li se vám to těžké, dokažte aspoň, že graf $K_{3,n}$ má $n^2 3^{n-1}$ koster. Za $K_{3,n}$ dostanete dva body, za $K_{m,n}$ tři.

$\boxed{2+1}$ 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že vrcholy $u, v \in V$ jsou *dvojníci*, pokud platí, že každý vrchol sousedící s u sousedí také s v a naopak (z čehož mimo jiné plyne, že u nesousedí s v). Dokažte, že když graf G obsahuje dva dvojníky u a v, kteří mají stupeň dva, tak G má sudý počet koster. Obtížnější varianta: dokažte, že když G má dva dvojníky stupně d, tak počet koster G je násobek d. Za jednoduchou variantu jsou dva body, za obtížnější tři. (*Poznámka: pokud se vám zdá i obtížnější varianta příliš snadná, můžete dokázat ještě obecnější tvrzení: pokud v G existuje k vrcholů stupně d, z nichž každé dva jsou dvojníci, tak počet koster G je násobek d^{k-1}.*)

$\boxed{3}$ 3. Pro každý graf na následujícím obrázku určete, kolik má koster (1 bod za každý graf).



G_1 G_2 G_3