Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

devátá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 23. 4. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

1. Nechť $k_v(G)$ a $k_e(G)$ označují vrcholovou a hranovou souvislost grafu G. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

   $\boxed{2}$ (a) Každý graf G, pro který platí $k_e(G) \neq k_v(G)$, obsahuje vrchol stupně aspoň 4.

   $\boxed{1}$ (b) Nechť $G = (V, E)$ je graf a $v \in V$ nějaký jeho vrchol. Označme $G - v$ graf vzniklý z G odstraněním vrcholu v a všech hran incidentních s v. Potom $k_v(G - v) \leq k_v(G)$ a také $k_e(G - v) \leq k_e(G)$.

$\boxed{1+2}$ 2. Nechť M je nějaká matice tvaru $m \times n$, jejíž prvky jsou nuly a jedničky. Řádky a sloupce M budeme souhrnně označovat jako *linie* M, takže M má $m + n$ linií. Řekneme, že nějaká množina linií $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ *pokrývá* matici M, pokud každá jednička v M je obsažená v některé z linií v $\mathcal{L}$. Nechť $\ell(M)$ označuje velikost nejmenší množiny linií pokrývající M. Nechť $j(M)$ označuje největší číslo k takové, že v M lze najít k jedniček z nichž žádné dvě neleží na společné linii. Dokažte, že $\ell(M) = j(M)$. Za důkaz rovnosti dostanete 3 body, pokud dokážete jen jednu z nerovností ($\ell(M) \leq j(M)$ nebo $\ell(M) \geq j(M)$), dostanete 1 bod.

   (Příklad: následující matice

$$M = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

   má $\ell(M) = 3$*, protože ji lze pokrýt prvním řádkem, druhým sloupcem a čtvrtým sloupcem, ale nelze ji pokrýt pomocí dvou linií. Pro* M *také platí* $j(M) = 3$*, protože například jedničky na pozicích* $(2, 2)$*,* $(1, 3)$ *a* $(4, 4)$ *nesdílejí žádnou linii, ale mezi libovolnými čtyřmi jedničkami budou vždy aspoň dvě na stejné linii.)*

   Otázka recyklovaná z předchozí série:

$\boxed{2}$ 3. Máme dány dvě posloupnosti $(a_1, \ldots, a_m)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$ nezáporných celých čísel. Naším cílem je najít matici nul a jedniček s m řádky a n sloupci tak, aby pro každé $i \in [m]$ a $j \in [n]$ platilo, že i-tý řádek obsahuje přesně a_i jedniček a j-tý sloupec obsahuje přesně b_j jedniček. Najděte algoritmus, který pro zadaná $(a_1, \ldots, a_m)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$ v polynomiálním čase rozhodne, zda taková matice existuje, a případně takovou matici zkonstruuje. Nezapomeňte dokázat, že Váš algoritmus úlohu skutečně řeší.