Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

osmá série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 16. 4. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{3}$ 1. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé. (1 bod za každé tvrzení)

(a) V každé tokové síti, která má aspoň dva různé maximální toky, lze najít nekonečně mnoho maximálních toků.

(b) Když R je elementární řez v nějaké tokové síti $\mathcal{S}$ a e nějaká hrana v řezu R, tak množina $R \setminus \{e\}$ už není řez v $\mathcal{S}$.

(c) Pokud $\mathcal{S}$ je toková síť, která má aspoň jeden tok kladné velikosti, tak v této síti existuje hrana e, která je nasycená v každém maximálním toku. (Řekneme, že hrana e je nasycená v toku f, pokud $f(e)$ je rovno kapacitě hrany e.)

$\boxed{3}$ 2. Máme dány dvě posloupnosti $(a_1, \ldots, a_m)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$ nezáporných celých čísel. Naším cílem je najít matici nul a jedniček s m řádky a n sloupci tak, aby pro každé $i \in [m]$ a $j \in [n]$ platilo, že i-tý řádek obsahuje přesně a_i jedniček a j-tý sloupec obsahuje přesně b_j jedniček. Najděte algoritmus, který pro zadaná $(a_1, \ldots, a_m)$ a $(b_1, \ldots, b_n)$ v polynomiálním čase rozhodne, zda taková matice existuje, a případně takovou matici zkonstruuje. Nezapomeňte dokázat, že Váš algoritmus úlohu skutečně řeší.

$\boxed{2}$ 3. Na následujícím obrázku je toková síť, v níž z je zdroj, s je stok a čísla u hran označují kapacity. Najděte maximální tok a minimální řez (tj. řez s nejmenší kapacitou) v této síti. Naznačte, jak jste k výsledku došli.