Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

třetí série, verze pro cvičení ve středu 14:00

Termín odevzdání: nejpozději ve středu 12. 3. ve 14:00.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.
Symbol $[n]$ označuje množinu čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Pro následující posloupnosti čísel najděte jejich vytvořující funkce. Výsledek vyjádřete v uzavřeném tvaru, tj. vzorečkem bez použití nekonečných sum.

   $\boxed{1}$ (a) posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = n2^n$.

   $\boxed{1}$ (b) posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_n = \binom{n}{10}$.

   $\boxed{2}$ (c) posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $c_n = n^3$. Nápověda: pokud už umíte vyřešit předchozí příklad, může vám pomoci vztah $n^3 = 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + n$.

   $\boxed{2}$ (d) posloupnost $(d_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $d_n = \frac{1}{3^n}$ pro n sudé a $d_n = 2^n + 1$ pro n liché.

   $\boxed{2}$ (e) posloupnost $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, kde e_n je definováno jako počet způsobů, jak lze číslo n vyjádřit jako součet pěti lichých čísel. Jinými slovy, e_n je počet uspořádaných pětic $(n_1, \ldots, n_5)$ takových, že $n_1, \ldots, n_5$ jsou lichá přirozená čísla, jejichž součet je n. Nápověda: vzorec pro e_n znát nemusíte, stačí vzorec pro vytvořující funkci.

Následující příklad je převzatý z předchozí série. Pokud jste některou jeho část už vyřešili, tak ji samozřejmě už znovu odevzdávat nemusíte.

$\boxed{1.5+1.5}$ 2. Označme $r(n)$ počet rovinných grafů na množině vrcholů $[n]$ a $g(n)$ počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$. Dokažte, že pro každé dostatečně velké n platí

$$r(\lfloor n^{1.999} \rfloor) < g(n) < r(n^2).$$

Za každou nerovnost můžete dostat 1.5 bodu. Zdá-li se vám to těžké, zkuste aspoň dokázat obdobné nerovnosti, ve kterých funkci $\lfloor n^{1.999} \rfloor$ (nebo n^2) nahradíte nějakou jinou funkcí, pokud možno co největší (resp. co nejmenší).