Doplňkové domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

- Řešení domácích úkolů posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz.
- Na odevzdání řešení je časový limit do konce června.

1. Pro každou z následujících posloupností určete její vytvořující funkci.

$\boxed{0.5}$ (a) $0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots, 0, 2k+1, 0, \dots$

$\boxed{0.5}$ (b) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \dots, \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}, \dots$

$\boxed{0.5}$ (c) $0, -1, 4, -9, \dots, (-1)^n n^2, \dots$

$\boxed{1}$ 2. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $a_0 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Jakou hodnotu musí mít a_1, aby platilo, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

3. Nechť $S = (G, z, s, c)$ je toková síť. Předpokládejme, že v této síti existuje aspoň jeden tok kladné velikosti. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá tvrzení najděte protipříklad.

$\boxed{0.5}$ (a) Pokud je kapacita každé hrany S racionální číslo, tak i velikost maximálního toku v S je racionální číslo.

$\boxed{0.5}$ (b) Pokud je kapacita každé hrany S racionální číslo, tak pro libovolný maximální tok f a libovolnou hranu e platí, že $f(e)$ je racionální.

$\boxed{0.5}$ (c) Jestliže e je hrana, jejíž koncový vrchol je z nebo jejíž počáteční vrchol je s, tak pro každý maximální tok f platí $f(e) = 0$.

$\boxed{0.5}$ (d) V síti S existuje aspoň jeden maximální tok f takový, že pro každou hranu e, na níž má f kladný průtok, leží na nějaké orientované cestě ze z do s.

$\boxed{1}$ 4. Nechť $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina s množinou bodů X a množinou přímek $\mathcal{P}$. Protože každá přímka $p \in \mathcal{P}$ je množina bodů, tvoří množina přímek $\mathcal{P}$ množinový systém. Dokažte, že $\mathcal{P}$ má systém různých reprezentantů.

$\boxed{1}$ 5. *Magický čtverec řádu n* je matice tvaru $n \times n$, která obsahuje čísla $1, 2, \dots, n^2$, každé právě jednou, a navíc platí, že libovolné dva řádky i libovolné dva sloupce mají stejný součet. Ukažte, že pokud existují dva navzájem ortogonální latinské čtverce řádu n, tak existuje i magický čtverec řádu n.

6. Dokažte následující tvrzení.

$\boxed{1}$ (a) Nechť H je graf a nechť v je nějaký vrchol stupně d. Pokud je graf $H - v$ vrcholově d-souvislý, pak i graf H je vrcholově d-souvislý.

$\boxed{1.5}$ (b) Nechť G je graf s alespoň $k+1$ vrcholy. Potom G je vrcholově k-souvislý, právě když pro libovolnou $(k+1)$-tici $(x, y_1, y_2, \dots, y_k)$ různých vrcholů obsahuje graf G nějakou k-tici cest $(P_1, ..., P_k)$, kde cesta P_i spojuje vrchol x s vrcholem y_i, a navíc kromě x nemají žádné dvě tyto cesty jiný společný vrchol. (K řešení tohoto podpříkladu smíte využít tvrzení z předchozího podpříkladu, i když ho neumíte dokázat. Za jednu implikaci získáte půl bodu, za obě 1.5 bodu.)

$\boxed{1}$ (c) Pro každý vrcholově k-souvislý graf platí, že pro libovolnou k-tici vrcholů $v_1, \dots, v_k$ existuje v G kružnice obsahující všechny vrcholy $v_1, \dots, v_k$. (K řešení tohoto podpříkladu smíte využít tvrzení z předchozích podpříkladů, i když je neumíte dokázat.)

$\boxed{1}$ (d) Každý vrcholově k-souvislý graf s alespoň $2k$ vrcholy obsahuje kružnici délky $2k$. (I tady můžete využít tvrzení z předchozích podpříkladů, i když je neumíte dokázat.)

7. Rozhodněte, která z následujících tvzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad.

$\boxed{1}$ (a) Pro každý vrcholově 2-souvislý graf G platí, že pro libovolné tři vrcholy $x, y, z \in V(G)$ existuje v G kružnice, která tyto tři vrcholy obsahuje.

$\boxed{1}$ (b) Hrany libovolného vrcholově 2-souvislého grafu lze zorientovat tak, že každé dva vrcholy budou ležet na společné orientované kružnici.

$\boxed{1}$ (c) Nechť G je souvislý graf s alespoň dvěma hranami. Předpokládejme, že pro libovolné dvě hrany e a f, které mají společný vrchol, existuje v G kružnice obsahující e i f. Potom vždy platí, že G je vrcholově 2-souvislý.

8. Pro následující grafy určete, jakou mají vrcholovou a hranovou souvislost.

$\boxed{1}$ (a) Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$.

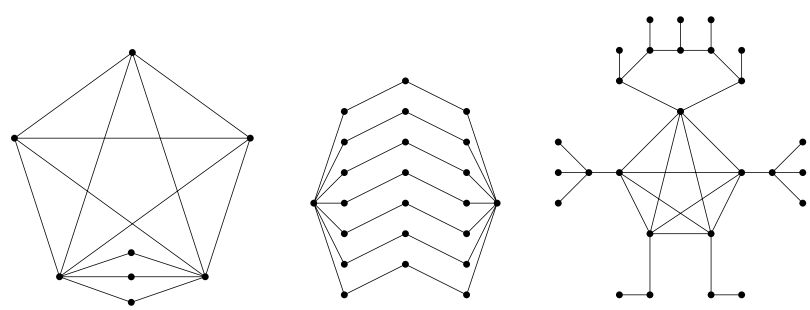
$\boxed{1}$ (b) Graf vzniklý z úplného grafu K_{2n} smazáním n vrcholově disjunktních hran.

$\boxed{1}$ 9. Připomeňme, že $k_v(G)$, $k_e(G)$ a $\delta(G)$ označují vrcholovou souvislost G, hranovou souvislost G a minimální stupeň G. Najděte graf G splňující $k_v(G) = 15$, $k_e(G) = 42$ a $\delta(G) = 138$.

$\boxed{1+1}$ 10. Dokažte, že úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má právě $n^{m-1}m^{n-1}$ různých koster. Zdá-li se vám to těžké, dokažte aspoň, že graf $K_{3,n}$ má $n^2 3^{n-1}$ koster. Za $K_{3,n}$ dostanete 1 bod, za $K_{m,n}$ 2 body.

$\boxed{1+1}$ 11. Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že vrcholy $u, v \in V$ jsou *dvojníci*, pokud platí, že každý vrchol sousedící s u sousedí také s v a naopak (z čehož mimo jiné plyne, že u nesousedí s v). Dokažte, že když graf G obsahuje dva dvojníky u a v, kteří mají stupeň dva, tak G má sudý počet koster. Obtížnější varianta: dokažte, že když G má dva dvojníky stupně d, tak počet koster G je násobek d. Za jednoduchou variantu je 1 bod, za obtížnější dva.

$\boxed{1.5}$ 12. Pro každý graf na následujícím obrázku určete, kolik má koster (půl bodu za každý graf).



G_1 $\quad$ G_2 $\quad$ G_3

13. Symbolem $\vec{K}_n$ označme úplný orientovaný graf na n vrcholech, tj. orientovaný graf, který pro každé dva různé vrcholy u a v obsahuje obě orientované hrany (u, v) i (v, u).

$\boxed{1}$ (a) Ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ je možné obarvit orientované hrany $\vec{K}_N$ dvěma barvami tak, že nevznikne žádný podgraf izomorfní $\vec{K}_{10}$, jehož orientované hrany by měly všechny stejnou barvu.

$\boxed{1}$ (b) Ukažte, že pro každé $b \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že když libovolně obarvíme orientované hrany $\vec{K}_N$ pomocí b barev, tak vždy bude existovat podgraf izomorfní $\vec{K}_n$ na jehož orientovaných hranách se vyskytují nejvýše dvě různé barvy.

$\boxed{2+2}$ 14. Najděte příklad nekonečného množinového systému $\mathfrak{M} = (M_i;\ i \in \mathbb{N})$, který splňuje Hallovu podmínku, ale nemá systém různých reprezentantů. (2 body)

Dokažte na druhou stranu, že když $\mathfrak{M} = (M_i;\ i \in \mathbb{N})$ je nekonečný množinový systém, v němž každá množina M_i je konečná, tak $\mathfrak{M}$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku. (2 body)