Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

desátá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 15. 5. ve 12:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2}$ 1. Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé: “Když G je vrcholově 2-souvislý graf, x, y nějaké jeho dva různé vrcholy a P nějaká cesta v grafu G s koncovými vrcholy x a y, tak v grafu G vždy existuje další cesta Q s koncovými vrcholy x a y, která je vnitřně vrcholově disjunktní s P.”

$\boxed{3}$ 2. Nechť G je graf s alespoň třemi vrcholy. Dokažte, že následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. G je vrcholově 2-souvislý.
2. Pro každou uspořádanou trojici (x, y, z) tří různých vrcholů v G lze v grafu G najít cestu z x do y obsahující vrchol z.
3. Pro každou uspořádanou trojici (x, y, z) tří různých vrcholů v G lze v grafu G najít cestu z x do y neobsahující vrchol z.

$\boxed{2}$ 3. Ukažte, že každý vrcholově 2-souvislý graf na n vrcholech má aspoň n různých koster.

$\boxed{2}$ 4. Nechť $G = (V, E)$ je libovolný graf. Definujme na jeho množině vrcholů relaci R následovně: pro $(x, y) \in V \times V$ platí $(x, y) \in R$ právě když buď $x = y$, nebo G obsahuje dvě hranově disjunktní cesty z x do y. Dokažte, že R je ekvivalence. Nápověda: můžete třeba nejdřív dokázat, že když nějaké dva vrcholy x, y nejsou v relaci R, tak buď leží v různých komponentách G, nebo existuje hrana $e \in E$ taková, že x a y jsou v různých komponentách $G - e$. (*Poznámka: třídy ekvivalence R se občas označují jako ‘komponenty hranové 2-souvislosti’ grafu G.*)