Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

šestá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 3. 4. ve 12:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{3+1}$ 1. *(Cílem tohoto příkladu je dokázat variantu Hallovy věty pro systémy reprezentantů, kdy reprezentanti nejsou nutně různí, tj. jeden prvek smí reprezentovat více množin.)* Mějme množinový systém $\mathcal{S} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Označme $X = \cup_{i=1}^{n} M_i$ množinu všech prvků v množinách $M_1, \ldots, M_n$. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) Každé množině ze systému $\mathcal{S}$ můžeme přiřadit nějaký její prvek jako reprezentanta tak, že žádný prvek X nebude reprezentantem pro víc než deset různých množin.

(b) Systém $\mathcal{S}$ splní následující modifikovanou Hallovu podmínku:

$$\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\colon \left| \bigcup_{i \in I} M_i \right| \geq \frac{|I|}{10}.$$

Za důkaz jedné implikace dostanete jeden bod, za důkaz obou čtyři body. (Nápověda: zkuste každý prvek X nahradit deseti totožnými 'kopiemi', a pak použít standardní Hallovu větu.)

$\boxed{2}$ 2. Nechť $[n]$ označuje množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $\binom{[n]}{k}$ označuje systém všech k-prvkových podmnožin množiny $[n]$. Pro která přirozená čísla $k \leq n$ platí, že $\binom{[n]}{k}$ má systém různých reprezentantů?

$\boxed{2}$ 3. Nechť $G = (V, E)$ je graf takový, že pro libovolný jeho podgraf $H = (V_H, E_H)$ platí, že $|E_H| \leq 10|V_H|$. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, aby do každého vrcholu G vstupovalo nejvýše 10 hran.