Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

pátá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 27. 3. ve 12:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{2}$ 1. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d (tj. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ jsou reálné konstanty a $\alpha_d \neq 0$). Dokažte, že existují reálná čísla $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_d$ taková, že pro každé x platí

$$p(x) = \beta_d \binom{x}{d} + \beta_{d-1} \binom{x}{d-1} + \cdots + \beta_1 \binom{x}{1} + \beta_0.$$

Nápověda: jde to dokázat třeba indukcí podle d.

$\boxed{2}$ 2. Nechť $a_0, a_1, \ldots$ je nějaká posloupnost čísel, nechť $A(x)$ je vytvořující funkce této posloupnosti a nechť d je nějaké nezáporné celé číslo. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

- Existuje polynom $p(x)$ stupně nejvýš d takový, že pro každé $n \geq 0$ platí $a_n = p(n)$.
- Vytvořující funkce $A(x)$ má tvar

  $$A(x) = \frac{B(x)}{(1-x)^{d+1}},$$

  kde $B(x)$ je nějaký polynom stupně nejvýš d.

$\boxed{2}$ 3. Nechť $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je nějaký polynom stupně d. Definujme částečné součty $s_n = p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$. Dokažte, že s_n se rovná nějakému polynomu stupně $d+1$. Jinými slovy, dokažte, že existuje polynom $q(x)$ stupně $d+1$ takový, že pro každé $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ platí $s_n = q(n)$.

$\boxed{2}$ 4. Nechť ℓ_n je počet způsobů, jak lze číslo n získat jako součet libovolného počtu lichých čísel, a nechť b_n je počet způsobů, jak lze číslo n získat jako součet libovolného počtu přirozených čísel větších než 1. V obou případech součty lišící se jen pořadím sčítanců pokládáme za různé. Uvažujme pouze součty s nenulovým počtem sčítanců, tj. $\ell_0 = b_0 = 0$. Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $\ell_n = b_{n+1}$.