Domácí úkoly z diskrétní matematiky

22. prosince 2014

Před každým příkladem najdete datum, dokdy ho máte odevzdat. Odevzdejte řešení před cvičením, t.j. do 10:40. Všechna tvrzení je potřeba DOKÁZAT, i když to v zadání není výslovně uvedeno. Pište v celých větách, domácí úkoly z různých týdnů nepište na stejný papír, a podepište se, prosím.

1. **Do 15.10.** Dokažte indukcí, že pro každé přirozené n platí $3^n > n^2$.

2. **Do 15.10.** Dokažte indukcí, že pro každé přirozené n platí

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

3. **Do 22.10.** Nechť A, B jsou podmnožiny množiny X. Dokažte tuto identitu pro jejich charakteristické funkce: $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

4. **Do 5.11.** Ve státní radě je po třech reprezentantech z každého ze 30 okresů. Kolika způsoby je možno vybrat pětičlennou komisi tak, aby z každého okresu obsahovala nejvýše jednoho reprezentanta?

5. **Do 5.11.** Kolika způsoby je možno seřadit do fronty 8 matematiků, 6 filozofů a 3 prodavače tak, aby zástupci žádné z profesí netvořili souvislý blok? (T.j. např. $M_1M_4P_2M_8M_2F_5F_6F_2P_1P_3F_3M_3M_7M_5M_6F_1F_4$ je v pořádku, zato $M_1M_4M_8M_2F_5F_6F_2P_2P_1P_3F_3M_3M_7M_5M_6F_1F_4$ není, prodavači tvoří souvislý blok. Nemusíte počítat výsledné číslo, stačí mi výraz, který obsahuje čísla, kombinační čísla, faktoriály apod.)

6. **Do 19.11.** Nechť $f : X \to Y$ je funkce na (neboli surjektivní). Dokažte, že existuje funkce $g : Y \to X$ taková, že $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ (kde Id_Y je identita na množině Y).

7. **Do 19.11.** Nechť $f : X \to Y$ je nějaká funkce a předpokládejme, že existuje funkce $g : Y \to X$ taková, že $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Dokažte, že potom f je na (neboli surjektivní).

8. **Do 19.11.** Nechť R a S jsou uspořádání na množině X. Rozhodněte, zda $R \cup S$, $R \cap S$ a $R \setminus S$ jsou nutně také uspořádání. Své tvrzení dokažte: pro každou z uvedených množin buďto dokažte, že je nutně také uspořádání, nebo najděte protipříklad, t.j. příklad dvou uspořádání, pro něž uvedená výsledná množina není uspořádání.

9. **Do 19.11.** Kolik existuje permutací čísel $1, \ldots, 10$ v nichž se žádné sudé číslo nezobrazí na sebe?

10. **Do 17.12.** Dokažte následující poněkud silnější variantu věty o dlouhém a širokém: Nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$. Každá posloupnost reálných čísel délky $k\ell+1$ obsahuje rostoucí podposloupnost délky $k+1$ nebo nerostoucí podposloupnost délky $\ell+1$.

11. **Do 17.12.** Dokažte, že věta o dlouhém a širokém je nejlepší možná v následujícím smyslu: Pro každé k a ℓ (přirozená čísla) existuje uspořádaná množina P s n prvky spňující $n = k\ell$, $\alpha(P) = k$ a $\omega(P) = \ell$. *(Na rozmyšlení (t.j. tuto část nemusíte odevzdávat a nebudu ji známkovat): Jak vypadá nějaká posloupnost přirozených čísel, která ukazuje, že výsledek v předchozím cvičení je nejepší možný? T.j. chceme posloupnost délky $k\ell$, která nemá rostoucí podposloupnost délky $k+1$, ani nerostoucí podposloupnost délky $\ell+1$.)*

12. **Do 17.12.** Dokažte, že graf na n vrcholech s c komponentami má alespoň $n-c$ hran.

13. **Do 7.1.** Dokažte, že pokud existuje strom se skóre $(d_1, \ldots, d_n)$, pak platí $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$.

14. **Do 7.1.** Nechť $k \in \mathbb{N}$. Nechť G je graf definovaný na uspořádaných k-ticích nul a jedniček tak, že dvě k-tice mezi sebou mají hranu právě tehdy, když se liší právě na dvou místech. Určete počet komponent grafu G. (Pochopitelně, své tvrzení dokažte.) Je G eulerovský?

15. **Do 7.1.** Nechť G je graf s n vrcholy, všechny stupně většího než $n/2$. Dokažte, že G obsahuje trojúhelník (jako podgraf).

16. **Do 15.2.** Dokažte, že pokud $(d_1, \ldots, d_n)$ je posloupnost kladných přirozených čísel, pro kterou platí $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$, pak existuje strom se skóre $(d_1, \ldots, d_n)$. (Nápověda: postupujte indukcí podle n. Dokažte, že jedno z čísel (řekněme d_1)

je rovno 1, a nějaké jiné (řekněme d_2) je větší než 1. Modifikujte posloupnost: smažte d_1 a d_2 nahraďte číslem $d_2 - 1$. Na výslednou posloupnost použijte indukční předpoklad. Nechť T je strom, který odpovídá této nové posloupnosti. Jak získáme strom, který odpovídá té původní posloupnosti?)

17. **Do 15.2.** Jaký je nejvyšší možný počet hran v grafu s n vrcholy a k komponentami? Odpověď dokažte.

18. **Do 15.2.** Určete počet grafů na dané n-prvkové množině, které nemají žádné izolované vrcholy. (Nápověda: inkluze a exkluze.)

19. **Do 15.2.** Kolik existuje zobrazení m-prvkové množiny na n-prvkovou množinu (t.j. surjektivních zobrazení)?